שבר פשוט – שבר עשרוני - אחוזים
כתבו
תלמה גביש, חני גביש

רציונל,
בניגוד לתרגילים המנותקים מהקשר והמחייבים שליטה בפעולות חשבוניות בלבד, בעיות חשבוניות רבות מחייבות הגדרה של שלם וחלקיו וניסוח מערכת היחסים ביניהם. שברים פשוטים, שברים עשרוניים ואחוזים הם שלוש אופנויות שונות של תיאור מערכות היחסים שבין שלמים לבין חלקים. אנחנו מעדיפים היבט זה או אחר בהתאם למאפייני הבעיה אותה עלינו לפתור. הכרת שלושת האופנויות האלה בהצגת יחסי שלם-חלק מאפשרת לילד להבין את הקשר שבין שברים פשוטים, שברים עשרוניים ואחוזים, ולפתח גמישות מחשבתית וחוויה של שליטה בתוכן הנלמד.
מאחר שהאחוז הוא **שבר שמכנהו 100** , הבנת שני סוגי השברים : הפשוט והעשרוני, היא תנאי הכרחי להבנתו, לכן המאמר מחולק ל – 3 פרקים :
1) השבר הפשוט ;
2) השבר העשרוני ;
3) האחוז.

פרק ראשון
שבר פשוט

<u>פרק זה הוא סיכום של השתלמות שנערכה בקיץ 2007 מטעם "העמותה הישראלית לקידום החינוך המתמטי לכל", שתרגמה את ספרי סינגפור והתאימה אותם לארץ, ונתנה להם את השם:</u>
<u>מתמטיקה יסודית</u>

<u>הנושאים שנדונו בהשתלמות:</u>
א. כיצד נוצרת חרדת מתמטיקה?
ב. מהות השלם כמערכת התייחסות וכבסיס להכרת השבר.
ג. חשיבות הדיוק השפתי בהוראת המתמטיקה.
ד. ארבע המשמעויות השונות של השבר :

1. מונה ומכנה ;
2. חלוקה של מספר קטן במספר גדול ממנו ;
3. יחס ;
4. השבר כאופרטור.

<u>א. כיצד נוצרת חרדת מתמטיקה?</u>

לפעולות חשבוניות, כמו בתחומים אחרים בחיים, יש לעיתים קרובות יותר ממשמעות אחת. חשיפת הילדים למשמעויות השונות של פעולות החשבון נעשית גם באמצעות שיום כל אחת מן המשמעויות והבחנתה ממשמעויות אחרות של אותה פעולה. כך לדוגמא, אנו מבחינים בין משמעויות שונות של פעולת החיסור באמצעות הצגת דוגמאות, הגדרה ושיום : חיסור של גריעה, חיסור של הפרדה, חיסור של השוואה, חיסור של השלמה לשלם, חיסור של ירידה וחיסור של תנועה אחורה. החשיפה לריבוי המשמעויות וההבחנה ביניהן יוצרת בהירות ושקט פנימי שכן, יש בידי הילד כלים להבחין בין מצבים שונים, להתאים את הפעולה החשבונית

הנדרשת לצורך הפתרון ולפתח גמישות מחשבתית. לעומת זאת, כאשר הילד נחשף למשמעות אחת בלבד של פעולת חשבון (לדוגמא: חיסור במשמעות של גריעה בלבד), או כאשר בזמן ההיחשפות לא משיימים כל משמעות בשם המייחד אותה, הוא אינו יכול להתמודד עם בעיות שבהן נדרשת אותה פעולה של חיסור, אבל במשמעות שונה לחלוטין (לדוגמא: חיסור במשמעות של הפרדה וכו'[1]). במצב זה המערכת הקוגניטיבית נדרשת להתמודד עם בעיות שונות כאשר לא עומדים לרשותה כלים הולמים. המבוכה של המערכת הקוגניטיבית הופכת עד מהרה לחרדה, "אני רואה שזה לא אותו דבר (התופעה), אז איך זה כן אותו דבר (התרגיל)?" חרדה זו מובילה להסתייגות ממתמטיקה המלווה בהאשמה עצמית ותחושה של חוסר מסוגלות: "מתמטיקה זה לא בשבילי".

<u>ב. מהות השלם כמערכת התייחסות וכבסיס להכרת השבר</u>

שבר הוא חלק משלם. לא תתכן הבנה של מהות השבר על כל משמעויותיו, ללא הבנה של מהות השלם. בתחילת כיתה א' בספרי מתמטיקה יסודית, מלמדים את הקשר בין השלם לבין חלקיו. הבנת מהות השלם היא <u>תשתית קריטית</u> שבלעדיה לא ניתן לבנות חשיבה מתמטית. הדיון שהתנהל בין משתתפי ההשתלמות הצביע על כך שהשלם אינו גודל מובן מאליו.

(ש) מה זה שלם?

(ת) מספר טבעי.

(ש) קניתי בקונדיטוריה חצי עוגה והבאתי אותה הביתה. האם העוגה הנמצאת בביתי היא שלם?

(ת) העוגה שברשותך היא שלם.

(ת) שלם הוא כל דבר שניתן לחלק אותו למשל חפיסת שוקולד.

(ש) האם התמונות התלויות על קירות האולם הזה הן שלם?

(ת) כן.

(ש) אם כך, מהו שלם?

(ת) שלם הוא כל תופעה שאותה אנחנו מגדירים כשלם. השלם מוגדר ע"י החלטה של מי שמגדיר אותו. לפיכך, העוגה שבמקרר, החדר הזה, כמות הכסף המצויה עתה בארנקי..... הם שלמים.

(ש) ארבע בנות עומדות עתה מול הכיתה, האם הן שלם?

(ת) כן.

(ש) מדוע?

---

[1] על המשמעויות השונות של החיסור ניתן לקרוא באתר web.macam.ac.il/~talma_g במדור המאמרים.

(ת) כי יש להן מכנה משותף.

(ש) התשובה איננה נכונה שכן, המכנה המשותף לא מגדיר את ארבע הבנות כשלם.

מה הופך אותן לשלם?

(ת) ההחלטה של מי שהעמיד אותן מול הכיתה כקבוצה אחת.

<u>ההקבצה הופכת את הפרטים הנפרדים ליחידה (UNIT).</u>

<u>חשוב להבחין בין אחדה לבין יחידה :</u>

<u>אחדה</u> – (one) היא המרכיב הבסיסי, המספר 1 , הבונה את המספר הטבעי.

<u>אחדות</u> – (ONES) הן אוסף של אֶחָדִ – ים (אחד, אחד, אחד....)

<u>יחידה</u> – תוצר של ארגון, למשל: מ׳, ק״ג, ליטר. כאשר אנחנו מקבצים עשר אחדות נוצרת יחידה חדשה : עשרת.

(ש) כיצד מלמדים את הילדים מהו שלם?

<u>דוגמא לדיאלוג על משמעות השלם</u>

מהות השלם היא אחד הנושאים החשובים ביותר בחשיבה מתמטית ועל כן ראוי להקדיש תשומת לב לפיתוח ההבנה בעניין זה. ילד שאינו מבין את מהות השלם יתקשה מאוד בכל פעולות החשבון ובכלל זה פתרון שברים. נדגים דו שיח שמבהיר לילדים את מהות השלם בשתי רמות..

<u>רמה ראשונית – כיתה א׳ בעת הלימוד של הסקיצה של השלם וחלקיו :</u>

מורה : האם כל הילדים היושבים בטור הסמוך לחלון הם שלם?

תלמיד : כן.

מורה : האם כל ילדי הכיתה שלנו הם שלם?

תלמיד : כן.

מורה : האם כל ילדי השכבה שלנו הם שלם?

תלמיד : כן.

מורה: איך זה יכול להיות? הטור הוא שלם, הכיתה היא שלם וגם השכבה היא שלם????

תלמיד : את אמרת כל : ... **<u>כל</u>** הילדים בטור... **<u>כל</u>** ילדי הכיתה... **<u>כל</u>** ילדי השכבה

מורה : המילה **<u>כל</u>** היא מילת הקבצה. כאשר אנחנו מקבצים את הילדים היושבים באותו טור, אנחנו הופכים אותם לקבוצה ומתייחסים אל הקבוצה כשלם. כאשר

אנחנו מקבצים את הילדים הלומדים באותה כיתה אנחנו הופכים אותם לקבוצה ומתייחסים אל הקבוצה הזאת כשלם. כאשר אנחנו מקבצים את הילדים הלומדים בשכבה אנחנו הופכים אותם לקבוצה ומתייחסים אל הקבוצה הזאת כשלם.

מורה: אם כך מה נוכל לומר על **כל** הילדים בטור... **כל** ילדי הכיתה... **כל** ילדי השכבה?

תלמיד: כל קבוצה כזאת היא שלם.

מורה: מה הופך אותה לשלם?

תלמיד: ההקבצה, קיבצנו אותם לקבוצה.

מורה: הסכמנו שכל הילדים בטור הם שלם וגם כל ילדי הכיתה הם שלם וגם כל ילדי השכבה הם שלם.... האם זה אותו שלם?

תלמיד: לא. כל הילדים בטור..., זה שלם קטן יותר מאשר כל ילדי הכיתה. כל ילדי הכיתה הם שלם קטן יותר מאשר כל ילדי השכבה.

מורה: נכון. כל אחד מהם הוא שלם. יש שלמים גדולים ויש שלמים קטנים. כל הכיתה היא שלם הגדול יותר מהשלם שהוא: כל הטור. כל הכיתה הוא שלם קטן ביחס (בהשוואה) לכל בית הספר.

לפי הגישה הספירלית יש מקום לדיון על מהות השלם ברמה גבוהה יותר.

דוגמה לדיון בכיתה בוגרת יותר:

מורה: מהי קבוצת התלמידים הכי גדולה שאנחנו יכולים לקבץ בתוך בית הספר?

תלמיד: **כל** תלמידי בית הספר.

מורה: איזו קבוצת תלמידים אנחנו יכולים לקבץ שתהיה קטנה יותר מכל תלמידי בית הספר?

תלמיד: **כל** תלמידי השכבה.

מורה: מה מהווים כל תלמידי השכבה?

תלמיד: שלם.

מורה: איזו קבוצת תלמידים אנחנו יכולים לקבץ שתהיה עוד יותר קטנה מכל תלמידי השכבה?

תלמיד: **כל** תלמידי הכיתה.

מורה: מה אפשר לומר על כל תלמידי הכיתה?

תלמיד: כל תלמידי הכיתה הם שלם.

מורה: איזו קבוצת תלמידים אנחנו יכולים לקבץ שתהיה עוד יותר קטנה מכל תלמידי הכיתה?

תלמיד: **כל** התלמידים בטור.

מורה: מה אפשר לומר על כל התלמידים בטור?

תלמיד: זוהי קבוצה שהיא שלם בפני עצמה.

מורה: האם אנחנו יכולים לחשוב על קבוצה שהיא קטנה יותר מכל קבוצת תלמידים בטור?

תלמיד: **כל** התלמידים היושבים ליד אותו שולחן הם קבוצה יותר קטנה מכל התלמידים בטור, הם רק שניים.

מורה: האם יש שלם שהוא קטן עוד יותר מכל הילדים היושבים ליד אותו שולחן?

תלמיד: ילד אחד.

מורה: נכון. כל ילד הוא שלם אחד.

תלמיד: אז אני שלם אחד ויותם שיושב על ידי הוא שלם אחד, אבל אנחנו ילדים שונים.

מורה: נכון. אתה שלם אחד וגם יותם הוא שלם אחד, יותם הוא שלם אחר כי הוא ילד אחר.

תלמיד: ואם מקבצים אותי ואת יותם ואומרים: כל הילדים היושבים ליד השולחן הזה – אז שנינו קבוצה והקבוצה הזאת היא עכשיו שלם.

מורה: נכון מאוד.

מורה: אמרנו שכל התלמידים היושבים בטור הם קבוצה ואמרנו גם שכל ילדי הכיתה הם קבוצה ... אז מה הקשר בין שתי הקבוצות האלה?

תלמיד: כל התלמידים היושבים בטור הם קבוצה והם חלק מקבוצה יותר גדולה שהיא כל ילדי הכיתה.

מורה: נכון. אפשר לומר שכל התלמידים היושבים בטור הם קבוצה חלקית של קבוצת כל ילדי הכיתה. במקום להשתמש במושג קבוצה נשתמש במושג שלם.

תלמיד: כל הילדים היושבים בטור הם גם שלם (כי הם קבוצה) וגם חלק מכל ילדי הכיתה.

מורה: האם אתם זוכרים את התמונה של הפינגווינים שהכרנו בכיתה א'?[המורה מציגה את התמונה המצויה בספר הראשון של כיתה א' של **מתמטיקה יסודית**.] מהו השלם?

תלמיד: כל הפינגווינים שבתמונה הם השלם.

מורה: נכון. אנחנו יכולים לקבץ את **<u>כל הפינגווינים שבתמונה לקבוצה</u>** ואז הם יהיו השלם שלנו. האם אנחנו יכולים להחליט על שלם אחר בתמונה הזאת?

תלמיד: אנחנו יכולים להגיד ש**<u>כל הפינגווינים הצעירים הם קבוצה</u>** ואז הם יהיו שלם.

מורה: האם כל הפינגווינים שבתמונה זה אותו שלם כמו כל הפינגווינים הצעירים?
תלמיד: לא. כל הפינגווינים הצעירים הם שלם יותר קטן מכל הפינגווינים שבתמונה.
מורה: נכון. כל הפינגווינים הצעירים הם שלם כי הפכנו אותם לקבוצה והם חלק משלם גדול יותר. הפינגווינים הצעירים הם קבוצה חלקית של הקבוצה השלמה: הפינגווינים שבתמונה. מהו השלם הכולל את כולם?
תלמיד: כל הפינגווינים שבתמונה.
מורה: נכון.

מומלץ מאוד לקרוא את המאמרים הבאים באתר
Web.macam.ac.il/~talma_g
"כינוי=נכפל=מחולק=שלם" מאת פרופ' רון אהרוני.
המאמר על מערכת התייחסות במבוא לספר המורה.

לנוחיותכם, הסבר קצר על מבנה האתר.
האתר מחולק ל – 3 מדורים:
1) ספר התלמיד, שניתן להדפיסו ולהשתמש בו כספר לימוד;
2) מאמרים;
3) ספר המורה, ובו מבואות, תשובות מלאות לשאלות של ספר התלמיד ודיונים לדוגמה.

ג. חשיבות הדיוק השפתי בהוראת המתמטיקה

מתמטיקה היא שפה הנשענת על מושגים מדויקים. מושגים רבים הוגדרו כבר לפני מאות שנים והם משרתים אותנו נאמנה עד עצם היום הזה. ביטול מינוחים ומושגים מבטא יחס של ביטול כלפי התרבות וכלפי השפה. סוג של יוהרה השוללת את הישגי התרבות של העבר שנרכשו במהלך ההיסטוריה האנושית. שלילת מושגים כמו: שבר מדומה, אורך ורוחב של מלבן, שטח ועוד מהווה עוד ניסיון פוסט-מודרני לשלול מושגים חד-משמעיים ולהותיר תרבות עקרה שבה כל דבר הוא יחסי. ישנם מושגים ותהליכים שהתרבות האנושית יצרה בעבורנו והם מסייעים לנו להגיע לרמה גבוהה של חשיבה והבנה.
כאשר איננו מבחינים בין שבר אמיתי, שבר מדומה ושבר מעורב ומכנים את כולם "שבר" אנחנו חוטאים בהכללת יתר, בתקשורת מעורפלת ומתעלמים ממערכת היחסים בין השלם לבין החלק. אחת המשמעויות של שבר אמיתי היא: חלק משלם,

שבר מדומה "מתחזה", שכן הוא מסתיר את השלם באמצעות כתיבה שיש בה קו שבר. *נדמה* לנו שהוא שבר אף כי איננו שבר אמיתי. מספר מעורב הוא צרוף של שלם ושל שבר אמיתי. שבר אמיתי הוא שבר שבו המונה קטן מן המכנה, לכן הוא קטן מ - 1.

ד. ארבע המשמעויות השונות של שבר אמיתי:

1. מונה ומכנה;
2. חלוקה של מספר קטן במספר גדול ממנו;
3. יחס;
4. השבר כאופרטור.

כאשר הילד לומד החל מכיתה א' שלאותה תופעה או פעולה חשבונית יכולות להיות משמעויות שונות הוא מפתח גמישות מחשבתית ויכולת להבין מצבים מורכבים. היכולת להתמודד ולהכיל ריבוי משמעויות היא בעלת חשיבות רבה במתמטיקה ובכל תחומי החיים. לפיכך, בנייה שיטתית של המשמעויות השונות של החיסור והחילוק מקלה מאוד על הילדים בשעה שהם נדרשים ללמוד את המשמעויות השונות של השבר.

משמעות ראשונה של השבר:

1. מונה ומכנה

השבר במשמעות זו נבנה בשלוש פעולות על פי הסדר הבא:

א. חילוק: חלוקת שלם אחד לחלקים שווים

לדוגמא: יש לי חפיסת שוקולד (שלם אחד) ואני מחלקת אותה ל-5 חלקים שווים.

ב. שיום: שיום כל חלק

לדוגמא: כל אחד מחמשת החלקים מכונה חמישית ונרשם כך:

השלם מיוצג
באמצעות הספרה 1

$\frac{1}{5}$

מספר החלקים השווים
שבו חילקנו את השלם

השם הוא כינוי הקובע את המכנה.

<u>ג. כפל:</u> קיבוץ מספר חלקים באמצעות פעולת כפל

לדוגמא: חלוקת השלם בשלב א' יצרה 5 חלקים שווים. השיום בשלב ב' הגדיר את מהותו של כל חלק. בתום שני השלבים הראשונים כבר אין יותר שלם אלא אוסף של חלקים זהים בערכם ומוגדרים באמצעות השם: חמישית. בשלב ג' אנחנו מקבצים, ע"י פעולת כפל, מספר חלקים מתוך אוסף החלקים שברשותנו. בדוגמא שלפנינו, נתתי ליעל שתי חמישיות (פעמיים חמישית).

מונה
מניית שני חלקים וקיבוצם
באמצעות פעולת כפל

$\frac{2}{5}$

מכנה
מספר החלקים השווים
שבו חילקנו את השלם

המשמעות הזאת של השבר היא הבסיס למציאת חלק מן השלם ומציאת השלם על פי חלקו.

דוגמאות למציאת החלק מהשלם:

(ש) ספרו סיפורים חשבוניים שיש בהם חלוקה של שלם לחלקים שווים ומנייה של מספר חלקים.

(ת) חילקתי פיצה ל – 8 חלקים שווים. כל חלק הוא שמינית. אכלתי שני חלקים. בסך הכל אכלתי שתי שמיניות. (השלם כאן הוא גודל רציף, כלומר, שאינו בנוי מקבוצה של פריטים).

(ת) בכיתה יש 27 תלמידים. חילקתי אותם ל – 3 קבוצות. כל קבוצה (חלק) היא שליש של תלמידי הכיתה. שלחתי שתי קבוצות לשיעור התעמלות. איזה חלק מן הכיתה שלחתי לשיעור התעמלות? שני שלישים. (השלם כאן הוא כמותי, כלומר, בנוי מקבוצה של פריטים).

<u>משמעות שנייה של השבר:</u>

2. חלוקת מספר שלם במספר גדול ממנו

לדוגמא: קנינו שתי פיצות וחילקנו אותן לחמישה אנשים. כל אחד מהם מקבל שתי חמישיות של פיצה. אנחנו מחלקים מספר קטן (2) במספר גדול ממנו (5).

כיצד נבצע את החלוקה?

<u>דרך א'</u>

מחלקים פיצה אחת לחמישה חלקים שווים ואח"כ מחלקים פיצה שנייה לחמישה חלקים שווים. כל איש מקבל חמישית מן הפיצה הראשונה ועוד חמישית מן הפיצה השנייה ובסך הכל שתי חמישיות פיצה:

$$2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

<u>דרך ב'</u>

לו הנחנו את הפיצות זו על גבי זו וחילקנו אותן לחמישה חלקים, הרי כל חלק הוא חמישית של שני שלמים.

$$\frac{1}{5}\times 2=\frac{2}{5}$$

<u>משמעות שלישית של השבר:</u>

3. יחס בין שני מספרים

השבר מבטא יחס בין שני גדלים או יותר, למשל 5 : 3.

<u>יחס בין חלק לבין שלם:</u> לדוגמא, יש לי 50 ₪. נתתי לך 30 ₪. איזה חלק מכספי נתתי לך?

כל אחד מן השקלים שלי הוא $\frac{1}{50}$ מתוך כל כספי (השלם). נתתי לך 30 ₪ ועל כן נתתי $\frac{3}{5}=\frac{30}{50}=\frac{1}{50}\times 30$ מתוך כספי.

יחס מבוטא תמיד בצורתו המצומצמת.

(ש) נסתכל על $\frac{2}{5}$ כיחס, מה פירוש יחס של 2 ל – 5?

(ת)

<u>יחס בין שתי קבוצות חלקיות השייכות לאותו שלם:</u> מכל שלם (שבו חמישה חלקים) א׳ מקבל $\frac{2}{5}$ מהשלם וב׳ מקבל $\frac{3}{5}$ מהשלם. למשל: מכל 5 ₪ מקבל עומרי 2 ₪ ($\frac{2}{5}$של הסכום הכולל) ויואב מקבל 3 ₪ ($\frac{3}{5}$מהסכום הכולל).

היחס בין מה שמקבל עומרי למה שמקבל יואב הוא 3 : 2. זהו היחס בין החלקים שמרכיבים את השלם.

<u>יחס בין שני שלמים:</u> לדוגמא, על כל 2 פריטים בקבוצה אחת יש 5 פריטים בקבוצה אחרת. למשל על כל 2 שיחי ורד ששותל הגנן, הוא שותל 5 שיחי יסמין.

<u>הרחבה וצמצום</u>

היחס בין שיחי הוורד לשיחי היסמין הוא 5 : 2 , כלומר מספר שיחי הורד הוא 2/5 ממספר שיחי היסמין. (קריאת היחס 5 : 2 היא משמאל לימין, שיחי הוורד הם הראשונים במשפט העברי לכן 2 יופיע ראשון משמאל בכתיבה החשבונית. כך נשמר סדר הכתיבה בהתאמה.)

אנחנו יודעים את <u>היחס</u> בין מספר השיחים, אך אין לנו מושג על <u>כמות</u> השיחים. נוכל להפיק מידע זה אם יהיה נתון לנו מספר שיחי הורד או מספר שיחי היסמין ואם נשמר את היחס.

אם ידוע לנו שמספר שיחי הוורד הוא 18. נוכל על ידי פעולת הרחבה לחשב את מספר שיחי היסמין, לפי התרגיל:

$$\frac{2}{5}=\frac{18}{?}$$

18 גדול פי 9 מ – 2 , לכן במקום של סימן השאלה יש לרשום מספר שגדול פי 9 מ – 5

,

כלומר: 45 .

לפי זה, אפשר לראות את פעולות ההרחבה והצמצום של השבר כפעולות שמשמרות את היחס ומבטאות אותו באופנים שונים.

<u>ביצוע הפעולות האלה:</u>

הכפלת המונה והכפלת המכנה באותו מספר אינה משנה את היחס בין המונה למכנה, היחס בין 18 ל – 45 שווה ליחס בין 2 ל – 5. זוהי **ההרחבה**.

הכפלת המונה מכפילה את השבר,

הכפלת המכנה מחלקת את השבר.

הכפלת השבר וחילוקו באותו מספר אינה משנה את ערך השבר.

היחס בין המונה למכנה נשמר אם שניהם מוכפלים באותו מספר.

נשנה את השאלה על שיחי הוורדים ושיחי היסמין :
גנן שתל בגן 18 שיחי וורד ו – 45 שיחי יסמין . מה היחס בין שיחי הוורד ושיחי היסמין?
יש לזכור שיחס מתמטי הוא יחס של פי... ומקובל לבטא יחס כזה בצורתו המצומצמת.
כדי לענות על השאלה, נרשום את היחס בין 18 ל – 45 ונצמצם את השבר שקיבלנו, לפי התרגיל הבא :

$$\frac{18}{45}=\frac{2}{5}$$

בצמצום :
חילוק המונה הוא חילוק השבר,
חילוק המכנה הוא הכפלת השבר.
חילוק והכפלה של השבר באותו מספר שומר על ערך השבר ועל היחס בין המונה למכנה.
היחס בין המונה למכנה נשמר אם שניהם מחולקים באותו מספר.

<u>שתי משמעויות יש להרחבה ולצמצום</u> :
1) אפשר לראות את ההרחבה והצמצום של השבר כפעולת **פריטה** או **הקבצה**, המוכרת לנו מהמספרים השלמים.
הרחבה היא פריטה : יותר חלקים שערך כל אחד מהם קטן באותה מידה (פי אותה מידה) שמספרם גדול . במקום עשרת אחת המקובצת ביחד נקבל 10 אחדות בודדות. כל אחדה קטנה פי 10 מעשרת, ומספר האחדות הבודדות גדול פי 10 ממספר העשרות שפרטנו.
צמצום הוא הקבצה : פחות חלקים שערך כל אחד מהם גדול יותר באותה מידה שמספרם קטן.
במקום 10 אחדות בודדות – יחידה אחת : עשרת, שערכה גדול פי 10 מערך האחדה.

2) אפשר לראות את ההרחבה ואת הצמצום כביטויים שונים של אותו **יחס**.

<u>**מערכת התייחסות**</u>

קביעת יחס נעשית לפחות בין שני מרכיבים (לדוגמא: 2 ו - 7) אשר כל אחד מהם יכול לשמש נקודת מוצא לחישוב היחס. היחס בין שני המרכיבים איננו סימטרי. 2 **__ביחס ל – 7__** הופך את 7 לנקודת מוצא לחישוב היחס. לעומת זאת, 7 **__ביחס ל – 2__** הופך את 2 לנקודת מוצא לחישוב היחס. כאשר עוסקים ביחס צריך לבחור את המרכיב הרלבנטי אשר יהווה נקודת מוצא לחישוב היחס**.** כלומר, בחירת המרכיב הרלבנטי הופכת אותו *למערכת ההתייחסות* שלנו בפעולה מסוימת.

מרכיב המשמש נקודת מוצא לקביעת היחס, מקבל מעמד של מערכת התייחסות.

אנחנו יכולים לקבוע את היחס כאשר מערכת ההתייחסות שלנו היא השלם הכולל, או כאשר מערכת ההתייחסות היא הקבוצה החלקית וכו'.

הגדרה של מערכת ההתייחסות מאפשרת לנו למצוא איזה חלק מקבל א' **__פחות__** מב'? או איזה חלק מקבל ב' __יותר__ מא'?

בכל אחת משתי השאלות הללו מרכיב/שלם אחר משמש נקודת מוצא לחישוב היחס. התשובות לשאלות הללו מחייבות הבנה של השלם כמערכת התייחסות.

נוח להציג זאת באמצעות אחוזים.

לדוגמא: שרה מרוויחה ב – 30% יותר מיוסי. בכמה אחוזים מרוויח יוסי פחות משרה?

__מהו השלם?__

נוח לנו להחליט שמשכורתו של יוסי היא השלם. במלים אחרות המשכורת של יוסי מקבלת מעמד של מערכת התייחסות שכן, ביחס אליה אנו קובעים את משכורתה של שרה.

__משכורתו של יוסי__ (השלם)	**__משכורתה של שרה__** (בהשוואה למשכורתו של יוסי)
100%	130%

היחס בין משכורתו של יוסי לבין משכורתה של שרה: $\frac{100}{130}$

היחס בין משכורתו של יוסי לבין משכורתה של שרה (באחוזים): $\frac{100}{130}\times 100 \approx 77\%$

במלים אחרות: יוסי משתכר בערך 77% ממשכורתה של שרה.

בכמה אחוזים משתכר יוסי פחות מאשר שרה? 23% = 77% - 100%
בכמה אחוזים משתכרת שרה יותר מאשר יוסי? 30% (נתון בשאלה)

<u>מה מקור הפער?</u>

כאשר אנחנו רוצים לדעת בכמה אחוזים משתכר יוסי פחות משרה, משכורתה של שרה
היא השלם, היא המערכת אליה אנחנו מייחסים את משכורתו של יוסי. לעומת זאת, כאשר אנחנו רוצים לדעת בכמה אחוזים משתכרת שרה יותר מאשר יוסי, משכורתו של יוסי היא השלם, היא המערכת אליה אנחנו מייחסים את משכורתה של שרה.
בכל אחת משתי השאלות, מוגדרת מערכת התייחסות אחרת אשר ביחס אליה מתבצע החישוב.
נחזור לבעיית עומרי ויואב שבה נתון היחס לא באחוזים, אלא בשברים.
איזה חלק מקבל עומרי פחות מיואב? בהשוואה למה שמקבל יואב (השלם), עומרי מקבל ב - $\frac{1}{3}$ פחות. הוא מקבל שקל אחד פחות ביחס ליואב והשקל הזה הוא ב - $\frac{1}{3}$ פחות מאשר מקבל יואב.
איזה חלק מקבל יואב יותר מעומרי? בהשוואה למה שמקבל עומרי (עכשיו הוא השלם), יואב מקבל ב - $\frac{1}{2}$ יותר. הוא מקבל שקל אחד יותר ביחס לעומרי והשקל הזה הוא ב - $\frac{1}{2}$ יותר מאשר מקבל עומרי.
השקל יכול להיות שליש והוא יכול להיות גם חצי, תלוי מהו השלם שאליו מתייחסים.

היחס הוא מושג מופשט הקשה לתפיסה כיוון שהוא אינו עוסק בכמויות כשלעצמן אלא בקשר שביניהן. היחס הוא תוצר מלאכותי של החשיבה האנושית המחפשת משמעות ביקום. היחס בין שיחי הורד לבין שיחי היסמין הוא $\frac{2}{5} = 5 : 2$. מתוך נתון זה איננו יודעים כמה שיחי ורד וכמה שיחי יסמין נשתלו. רק כאשר נדע מהי הכמות הכוללת של השיחים שנשתלו, או כאשר נדע את כמות השתילים של הורד או של היסמין, נוכל לחשב באמצעות היחס, <u>כמה</u> שיחי ורד או <u>כמה</u> שיחי יסמין נשתלו.

לעיתים קרובות כאשר אנחנו מקבלים מידע כמותי ללא מידע באשר ליחס איננו יכולים להבין את המשמעות האמיתית של הכמות. למשל: יעקוב מישראל מרוויח 2000 ₪, ג'ון מארה"ב מרוויח 2000$ ורוברט מצרפת מרוויח 2000 יורו. מי מהם עני ומי עשיר? בנתונים הקיימים איננו יודעים מהי התשובה. לעוני ועושר אין הגדרה מוחלטת אלא יחסית. עוני ועושר הם ביחס להכנסה המקובלת במקום מסוים. כדי שנוכל להשיב על השאלה אנחנו זקוקים לנתונים על יחס: למשל, משכורתו של יעקוב היא שליש מן השכר הממוצע בישראל, משכורתו של ג'ון רבע מן השכר הממוצע בארה"ב ומשכורתו של רוברט היא חמישית מן השכר הממוצע בצרפת. עכשיו נוכל לומר שמשכורתו היחסית של יעקוב היא הגבוהה ביותר מבין השלושה.

<u>אפשר לבטא יחס גם בשבר וגם באחוז</u>. בעוד שבשבר אנחנו יכולים לבחור כל מספר כמכנה, באחוז המכנה קבוע והוא תמיד 100. לכן: $\frac{2}{5}$ הם שניים ביחס לחמש ו – 20% הם עשרים ביחס למאה.

<u>משמעות רביעית של השבר:</u>

<u>השבר כאופרטור</u>

רבים רואים בשבר אופרטור ותו לא. חשוב להבין שמשמעות השבר כאופרטור היא רק אחת מתוך 4 משמעויות שונות ולמשמעות זאת אין בלעדיות.

אופרטור – מספר המפעיל את הפעולה.

אופרנד – מקבל הפעולה.

בתרגיל כפל, הכופל הוא אופרטור והנכפל הוא אופרנד. כאשר אנחנו מחליפים את מקומם של הכופל (אופרטור) והנכפל (אופרנד) אין לכך כל השפעה על המכפלה (בהתאם לחוק החילוף). אולם כאשר אנחנו מנתחים את התהליך, השימוש בחוק החילוף יוצר שני תהליכים בעלי משמעויות שונות.

נתבונן בשני התרגילים הבאים עליהם אנו מפעילים את חוק החילוף:

$$\frac{1}{4}\times 20=$$

$$20\times\frac{1}{4}=$$

<u>התרגיל הראשון: רבע של עשרים</u>. רבע הוא אופרטור (כופל, מפעיל הפעולה) ועשרים הוא אופרנד (נכפל, מקבל הפעולה). משמעות הפעולה: יש לחלק 20 ל – 4.

התרגיל השני: עשרים פעמים רבע. עשרים הוא אופרטור ורבע הוא אופרנד.

פרק שני

השבר העשרוני

ראינו את תכונותיו של השבר הפשוט ואת הפעולות שניתן לעשות בו.

נרשום לפנינו סיכום קצר של מה שלמדנו ונשווה זאת לתכונות השבר העשרוני.

משמעויות השבר העשרוני

נציג לדוגמה את השבר העשרוני 0.7 , שהוא 7/10 .

כל מה שנכון לגבי 7 עשיריות הכתובות כשבר פשוט נכון לגבי 0.7.

השבר כמונה ומכנה

7 עשיריות נוצרות בתהליך :

שלם ש**חולק** ל – 10 חלקים שווים.

כל חלק הוא **עשירית** של השלם .

7 חלקים הם 7 עשיריות.

ערך המקום הוא המכנה והספרה היא המונה

לשבר הפשוט יש מונה ויש מכנה גם לשבר העשרוני יש מונה ויש מכנה.

המונה בשבר העשרוני הוא הספרה והמכנה הוא חזקה של 10, כלומר, המכנה הוא **ערך המקום.**

דוגמאות:

בשבר הפשוט 3/8

3 מונה את מספר השמיניות.

3 הוא המונה, שמינית היא המכנה. המכנה מיוצג על ידי המספר הכתוב מתחת לקו השבר.

בשבר העשרוני 0.7

7 מונה את מספר העשיריות.

7 הוא המונה. הוא מונה את העשיריות. המכנה הוא עשירית והוא נקבע באמצעות ערך המקום. המונה אומר: כמה? המכנה אומר: מה?

מסקנה:

ערך המקום = מכנה

הספרה = מונה

השבר כמנה

7 עשיריות הן המנה של חלוקת 7 ל – 10.

השבר כיחס

מאחר ש – 0.7 שווה ל – 7/10 הריהו מבטא את היחס שבין 10 : 7.

ייחודו של השבר העשרוני שהוא מוגבל למכנים עשרוניים בלבד, כלומר, חזקות של 10. התכונה הזאת מאפשרת לו מצד אחד לשמור על המבנה ועל הכתיבה של השיטה העשרונית, ומהצד השני לשמור את כל התכונות של השבר הפשוט.

<u>הרחבה וצמצום</u>

ראינו שכפל המונה וכפל המכנה באותו מספר מרחיבים את השבר.
ראינו שהרחבה היא פעולת פריטה השייכת ל**יחסי פי**... (יחסים המתבטאים בפעולות כפל או חילוק).
יותר חלקים (פי כמה יותר) ובאותה מידה ערך כל חלק קטן יותר (פי כמה פחות).
דוגמאות:
בתרגיל :

23
-
8

כדי לחסר 8 מ – 3 אנחנו פורטים עשרת אחת, כלומר, אנחנו מחליפים את העשרת בעשר אחדות שערך כל אחת מהן קטנה פי 10 מערך העשרת, לעומת זאת יש פי 10 יותר אחדות מעשרת. 10 אחדות שוות לעשרת אחת.
אם נרחיב את השבר 3/4 ב – 2 נעשה אותה פעולה,
נמיר את הרבעים בשמיניות. כל שמינית קטנה פי 2 מכל רבע.
כדי לשמור על השיוויון 6/8 = 3/4 נכפיל את מספר השמיניות. במקום 3 רבעים נקבל 6 שמיניות.
כל שמינית קטנה פי 2 מרבע ומספר השמיניות גדול פי 2 מ - 3, מכאן שהשיוויון בין 3/4 לבין 6/8 קיים.
בתרגיל

27
+
8

אנחנו מחברים את 7 האחדות עם 8 האחדות ומקבלים 15 אחדות. מתוך 15 האחדות האלה אנחנו מקבצים 10 אחדות לעשרת אחת: פחות חלקים(פי 10 פחות) כאשר ערך כל חלק מהם גדול פי 10 (פי 10 יותר). זוהי פעולת **הקבצה** שהיא פעולת **צמצום**.

הפיכת 6/8 ל – 3/4 היא פעולת צמצום. זוהי הקבצה: פחות חלקים(פי 2 פחות). פי אותה מידה שמספר החלקים קטֵן כך גדל ערכם (פי 2 יותר). אנחנו מקבצים חלקים קטנים יותר לחלק אחד שערכו גדול יותר.

זוהי פעולת **צמצום**, שאינה אלא **הקבצה**.

בגלל המכנה של השבר העשרוני שהוא חזקה של 10, אפשר להרחיב שבר עשרוני על ידי כתיבת אפסים בסופו של המספר מימין לנקודה העשרונית או על ידי מחיקת אפסים הנמצאים בסופו של המספר מימין לנקודה.

לכן 0.9 (שהוא 9 עשיריות) שווה ל – 0.90 (שהוא 90 מאיות).

אם נתון 0.9 ואנחנו ממירים אותו ל – 0.90, עשינו פעולת **הרחבה**.

אם נתון 0.90 ואנחנו ממירים אותו ל – 0.9 בצענו פעולת **צמצום**.

מסקנה:

צמצום בשברים פשוטים= הקבצה במספרים העשרוניים

הרחבה בשברים פשוטים = פריטה במספרים העשרוניים

אפשר להרחיב שבר עשרוני על ידי כתיבת אפסים בסופו של המספר אחרי הנקודה העשרונית מימין

אפשר לצמצם שבר עשרוני על ידי מחיקת אפסים הנמצאים אחרי הספרה האחרונה שמימין לנקודה העשרונית, בסופו של המספר

מכנה משותף

כדי לחבר ולחסר אנחנו זקוקים למכנה משותף.

מכנה משותף במספר העשרוני

הכתיבה האנכית של פעולת החיבור והחיסור היא פעולה של יצירת **מכנה משותף**, כי אנחנו מחברים אחדות עם אחדות, עשרות עם עשרות, מאות עם מאות וכך הלאה.

בתרגיל

452

+

———
עצם הכתיבה המאונכת, המסתמכת על ערך המקום, היא יצירת מכנה משותף.
גם בחיסור המאונך עצם הכתיבה יוצרת מכנה משותף, כמו בתרגיל
1873
-
84
———
במיוחד בולט הדבר בחיבור ובחיסור של השבר העשרוני.
דוגמאות
0.98
-
0.7
———
הכתיבה של 7 העשיריות מתחת ל – 9 העשיריות מבוססת על ערך המקום כלומר, היא יצירת מכנה משותף.
יתרונו של השבר הפשוט על השבר העשרוני הוא בגמישות בבחירת המכנה. בעוד שהשבר העשרוני מוגבל למכנים שהם חזקות של 10, הרי השבר הפשוט יכול להיות בעל מכנה כלשהו שאינו אפס. היתרון הזה מונע מאיתנו את הנוחיות של חיבור וחיסור במאונך של שברים פשוטים כאשר לשברים אין מכנה משותף.

מסקנה:

כתיבה מאונכת של תרגילי חיבור וחיסור בשבר העשרוני = יצירת מכנה משותף.
יצירת מכנה משותף בשבר הפשוט מאפשרת גמישות רבה יותר מאשר יצירת המכנה המשותף בשבר העשרוני, אך לעיתים החישוב בשבר הפשוט מורכב יותר מזה שבשבר העשרוני.

השבר הפשוט והשבר העשרוני כאופרטור

אופרטור הוא סימבול מתמטי המשמש לציון פעולה שיש לבצעה.
דוגמה לאופרטור הוא הכופל.
במאמרו של פרופ' רון אהרוני "כינוי=נכפל=מחולק=שלם" הוא מסביר מדוע 2/3 של משהו הם 2/3 פעמים של אותו המשהו, כלומר, מדוע 2/3 הוא אופרטור – כופל.
כדי להבין זאת נתבונן בבעיה הבאה:

2/3 מהספרים על המדף הם ספרי הרפתקאות. על המדף יש 33 ספרים. כמה מהם הם ספרי הרפתקאות?

<u>פתרון על ידי הבאה ליחידה</u>

כל הספרים על המדף הם השלם, מספרם 33.

כדי למצוא ערכו של 1/3 אחד מהשלם עלינו לחלקו ל – 3 חלקים שווים.

33 לחלק ל – 3 הם 11. זה ערכו של שליש אחד מכלל הספרים שעל המדף.

אנחנו מחפשים את ערכם של 2 שלישים כאלה, לכן עלינו לכפול את ערכו של שליש אחד ב – 2.

התרגיל ייראה כך:

$$\frac{33}{3}\times 2=22$$

זהו פתרון שנקרא **הבאה ליחידה** ומשמעותו: מציאת ערך היחידה כבסיס לפתרון.

לפי חוקי הכפל והחילוק של השברים נוכל לרשום את התרגיל הזה כך:

$$\frac{33\times 2}{3}=22$$

נוכל לרשום את התרגיל הזה גם כך:

$$33\times\frac{2}{3}=22$$

תרגיל זה שווה לפי חוק החילוף של הכפל לתרגיל הבא:

$$\frac{2}{3}\times 33=22$$

כאשר התרגיל רשום בדרך זו, אנו אומרים שאנחנו מחשבים 2/3 **של** 33 , כלומר, 2/3 הוא **אופרטור** – מבצע הפעולה. המספר 33 הוא ה**אופרנד** – מקבל הפעולה.

כאשר נתוני הבעיה מבוטאים בשבר עשרוני השימוש בשבר כאופרטור הינו נוח ומיידי.

נדגים זאת בבעיה הבאה:

0.3 מכלל תלמידי בית הספר יצאו לטיול. בבית הספר לומדים 340 תלמידים. כמה תלמידים יצאו לטיול?

אין טעם לחפש את ערך היחידה, שיחייב הפיכת 0.3 לשבר פשוט. הפתרון המיידי יהיה:

$$0.3\times 340=102$$

דרך כזו של פתרון מתאימה לשימוש במחשבון.

מסקנה:

השבר העשרוני נוח לשימוש כאופרטור והוא גם נוח לחישוב באמצעות מחשבון.

מציאת חלק משלם ושלם על פי חלקו באמצעות שבר פשוט ובאמצעות שבר עשרוני

מבעיות שמרכיביהן הם: שלם, חלק, היחס.

אפשר ליצור 3 סוגים של שאלות:

מציאת חלק משלם

מציאת השלם על פי חלקו

מציאת היחס.

נשווה את הפעולות לחישוב כל סוג כזה של בעיות כפי שהוא נעשה באמצעות השבר הפשוט ובאמצעות השבר העשרוני.

השוואת הפתרון של מציאת חלק משלם כשהנתונים הם שברים פשוטים לעומת פתרון אותו סוג של בעיה כשהנתונים הם בשבר עשרוני

בעיה לדוגמה:

בספר יש 420 עמודים. 4/5 מהם מאוירים. כמה עמודים מאוירים בספר?

<u>הפתרון בשבר הפשוט על ידי **הבאה ליחידה**</u>

נחלק את 420 ל – 5 חלקים שווים.

כל חלק הוא **חמישית** של 420.

ערך כל חמישית הוא 84 = 5 : 420

ערך 4 חמישיות הוא 336 = 84 X 4

336 עמודים מאוירים בספר.

את הפעולות האלה נציג בתרגיל אחד:

$$\frac{420\times 4}{5}=336$$

את התרגיל הזה אפשר לכתוב כך:

$$420\times\frac{4}{5}=336$$

בגלל חוק החילוף של הכפל, התרגיל יכול להיכתב כך:

$$\frac{4}{5}\times 420=336$$

נהוג לקרוא תרגיל זה: ארבע חמישיות של 420 הם 336.

4/5 הוא אופרטור ובתור גורם במכפלה ולפי חוק החילוף של הכפל הוא יכול לכפול את 420 מימין או משמאל.

פתרון אותה בעיה בשבר עשרוני

בספר יש 420 עמודים.

0.8 מהם מאוירים. כמה עמודים מאוירים בספר?

המספר 0.8 מקיים את השיוויונים:

$4/5 = 8/10 = 0.8$

כדי לייעל את הפתרון באמצעות השבר העשרוני, אין טעם להציגו כשבר פשוט.
הרבה יותר נוח לפתור בעיה זו תוך התבססות על השבר העשרוני כאופרטור.
התרגיל יהיה:

$0.8 \times 420 = 336$

בגלל חוק החילוף של הכפל אפשר לכתוב את התרגיל:

$420 \times 0.8 = 336$

התשובה: בספר יש 336 עמודים מאוירים.
נוח לחשב בדרך זו בעזרת מחשבון, אך הבנת המנגנון המתמטי שמוביל לפתרון זה דורשת הבנת התהליך כפי שהוא מיוצג בפתרון של הבאה ליחידה.

השוואת הפתרון של מציאת השלם על פי חלקו כשהנתונים הם בשברים פשוטים לעומת אותו פתרון כשהנתונים הם בשבר העשרוני

בעיה לדוגמה:

336 עמודים של ספר מאוירים. העמודים המאוירים מהווים 4/5 מכלל עמודי הספר.

כמה עמודים בספר?

הפתרון באמצעות הבאה ליחידה, כלומר מציאת ערך היחידה:

336 הוא 4 חמישיות מהסך הכל.

כדי למצוא ערך של חמישית אחת נחלק 336 ל – 4 חלקים שווים.

ערך כל חמישית הוא $84 = 4 : 336$

כדי למצוא כמה עמודים יש בספר בסך הכל, נחשב את ערכן של 5 חמישיות (השלם) על ידי הכפלת ערך החמישית האחת ב – 5.

$5 \times 84 = 420$

תשובה: בספר יש 420 עמודים.

בגלל חוק החילוף של הכפל, התרגיל יכול להיכתב כך:

$84 \times 5 = 420$

התרגיל יכול להיכתב כך:

$$\frac{336\times 5}{4}=420$$

אותו תרגיל יכול להיכתב גם כך :

$$336\times\frac{5}{4}=420$$

תרגיל זה שווה לתרגיל:

$$336:\frac{4}{5}=336\times\frac{5}{4}=420$$ (כפל בהופכי)

מסקנה :

במציאת חלק משלם <u>כופלים</u> את הגודל הכמותי הנתון בשבר המבטא את היחס.

האופרטור הוא הכופל.

במציאת השלם על פי חלקו <u>מחלקים</u> את הגודל הכמותי בשבר הנתון המבטא את היחס.

האופרטור הוא המחלק.

למסקנה זו יש השלכה על פתרון הבעיה כאשר היחס מבוטא בשבר עשרוני.

נציג את הבעיה בניסוחה זה :

336 עמודים של ספר מאוירים. העמודים המאוירים מהווים 0.8 מכלל עמודי הספר.

כמה עמודים בספר?

הפתרון יהיה מיידי :

$336 : 0.8 = 420$

זהו פתרון נוח למשתמשים במחשבון.

עם זאת, יש לזכור שזהו פתרון טכני שהבנתו תלויה בתהליך של מציאת ערך היחידה.

ניסיון העבר מוכיח שלימוד מציאת החלק מהשלם ומציאת השלם על פי חלקו בהסתמכות על התכונה של השבר כאופרטור, ללא ההסבר על הסיבות לפעולה החשבונית הזאת, מכשיל תלמידים רבים : לעיתים הם אינם זוכרים מתי מתבצע כפל ומתי מתבצע חילוק. לעיתים ההסבר הטכני מונע מהם פתרון בעיות מסובכות.

לאור זאת, רצוי מאוד להימנע מביסוס הוראת הבעיות של מציאת החלק מהשלם ומציאת השלם מהחלק בהסתמכות בלעדית על תכונת השבר כאופרטור.

מציאת היחס

יתרונו של השבר העשרוני – בפשטותו, וביכולת לקבל תשובה מיידית בעת השימוש במחשבון. עם זאת, לא נוח לחשב יחס באמצעות השבר העשרוני.

נציג זאת בעזרת הבעיה הבאה :

בספר יש 420 עמודים. 336 מאוירים . איזה חלק מהווים העמודים המאוירים מכלל עמודי הספר?

הפתרון באמצעות שבר פשוט :

כל עמוד הוא 1/420 מכלל הספר.

336 עמודים הם 336/420 מכלל עמודי הספר.

מקובל לבטא יחס בצורתו המצומצמת, לכן 4/5 = 336/420

הצגת היחס בצורת שבר עשרוני תחייב פעולה נוספת. במקרה שלנו אפשר על ידי הרחבה ב – 2 לקבל 8/10 ולרשום זאת בצורה העשרונית 0.8.

במספרים פחות נוחים הרישום בשיטה העשרונית יחייב חילוק המונה במכנה, לדוגמה :

רישמו את הצורה העשרונית של 4/7.

נחלק 4 ל – 7 :

```
 0 .5 7
 ______
 4 0 |  7
 3 5
 _____
   5 0
   4 9
 ______
```

במקרה הזה נקבל שבר עשרוני אינסופי. החישוב שלו אינו נוח ולא נוכל להגיע לדיוק ולפשטות של 4/7.

מסקנה :

כדאי להכיר את כל דרכי הפתרון האפשריים, כדי שנוכל להסתמך על תכונותיהם לייעול הפתרונות שלנו, ולבחור בפתרון הנוח לנו לפי צרכינו.

פרק שלישי

אחוזים

האחוז ומשמעותו

אחוז הוא מאית, כלומר, הוא שבר פשוט שמכנהו 100 והוא גם סוג של שבר עשרוני שמכנהו מאה.

שמו הלועזי : PERCENT (על כל מאה, או : אחד ממאה) מדגיש אמנם את משמעותו כיחס, עם זאת הוא שומר על **כל** התכונות של השבר הפשוט והעשרוני

שמנינו לעיל: יש לו מונה ומכנה, הוא מבטא תוצאה של חילוק, הוא מציג יחס והוא גם אופרטור.

יתרונם של האחוזים על פני השברים

נוח לחשב יחסים באמצעות אחוזים כי יש להם מראש מכנה משותף (100) ואין צורך לחשב מכנה זה בחיבור, בחיסור או בהשוואה. בעוד שמכנהו של שבר פשוט יכול לקבל כל ערך השונה מאפס, ובעוד שהמכנה של השבר העשרוני מורכב מחזקות שונות של 10, לאחוזים יש מכנה עשרוני אחד בלבד שהוא 100.

כתוצאה מבחירת המכנה 100 האחוז כפוף בעת ובעונה אחת לחוקים של המספרים העשרוניים ולחוקי השברים הפשוטים.

השימוש במונח "אחוז". מאפשר לדבר על חלקי אחוז, ולבטא אותם לפי השיטה העשרונית: כמו 8.9% או באמצעות שבר פשוט, כמו: $8\frac{1}{2}\%$ כלומר, שמונה וחצי אחוזים.

באמצעות האחוזים נוח לפתור בעיות מסובכות כמו מציאת השלם על פי הפרש החלקים ועוד. קל לתרגם את האחוז לשבר עשרוני, לכן נוח להשתמש בו גם כאופרטור. נוח לחשב באמצעותו יותר משלם ופחות משלם על ידי חישוב ערך האחוז האחד (חישוב ערך היחידה).

קל לתרגם אחוזים לשבר פשוט ולהיפך: את השבר הפשוט לאחוז. נראה להלן שבגלל תכונותיו אלה ניתן באמצעותו לפתור בעיות רבות ומסובכות בפשטות יחסית.

בגלל כל תכונותיו אלה הוא משמש בכל העולם לחישובים שונים ומגוונים וחשיבותו המעשית עצומה.

נבחן בעיות אחדות ונשווה את פתרונן באמצעות שברים פשוטים, שברים עשרוניים ואחוזים.

המעבר מאחוזים לשברים ומשברים לאחוזים

כדי להפוך אחוזים לשברים, עלינו לכתוב את המכנה של האחוזים.

67 אחוזים הם 67 מאיות.

הסימן % ,המכיל שני אפסים, מרמז על העובדה שאחוז הוא מאית.

$$\frac{67}{100} = 67\%$$

רישום המכנה של האחוזים משמעו חילוק 67 ל – 100.

לאור זאת, כדי להפוך שברים פשוטים או עשרוניים לאחוזים עלינו לכפול את השברים ב – 100.

לפי זה 3/5 יבוטא באחוזים כך:

$$\frac{3}{5}\times 100 = 60\%$$

ו – 0.6 יבוטא באחוזים כך:

$$0.6 \text{ x } 100 = 60\%$$

אפשר להסביר את הפעולה הזאת של כפל שבר ב – 100 כדי להפכו לאחוזים גם באמצעות המשמעות של השבר כמונה וכמכנה.

בשלם יש 100 מאיות, כלומר, יש בו 100% . אם נחלק את השלם (את מאה האחוזים) ל – 5 חלקים שווים, נקבל ערכה של חמישית אחת באחוזים. נכפול את הערך הזה של החמישית ב – 3 ונקבל את ערכן של 3 חמישיות מבוטא באחוזים.

התרגיל ייראה כך:

$$\frac{100\times 3}{5} = 60\%$$

מציאת החלק מהשלם כשהיחס נתון באחוזים

בעיה לדוגמה:

54% מהפרחים בגן הם כלניות. בגן יש 5600 פרחים. כמה מהם כלניות?

<u>פתרון על ידי הבאה ליחידה</u>

5600 פרחים הם ה**שלם.**

נבצע בשלם פעולת **חילוק** ב – 100 כדי למצוא ערך של מאית אחת , שהוא ערכו של אחוז אחד.

ערך של אחוז אחד (היחידה) יהיה 56 = 100 : 5600 .

כלומר, ערכו של אחוז אחד הוא 56.

ערכם של 54 אחוזים (54 יחידות) הוא 3024 = 54 X 56.

בגן יש 3024 כלניות.

<u>הפתרון של הבעיה בצעד אחד</u>

$$\frac{5600\times 64}{100} = 3024$$

זהו פתרון המתבסס על מציאת החלק מהשלם על ידי הבאה ליחידה, אך ללא הפירוק של התהליך לשני שלביו הנפרדים:

1) חילוק ב – 100 למציאת ערכו של אחוז אחד.

2) כפל ערכו של האחוז האחד ב – 64 למציאת ערכם של 64 אחוזים.

<u>הפתרון של הבעיה כאשר האחוז הוא אופרטור הכתוב בשיטה העשרונית</u>

54 אחוזים הם 54 מאיות. הביטוי של עובדה זו בשבר עשרוני היא 54% = 0.54 .

פתרון התרגיל יהיה, אם כך :

$$0.54 \text{ X } 5600=3024$$

זהו פתרון שנוח לשימוש במחשבון. כדי לבצע פתרון כזה חייבים, כצעד ראשון, לבטא את האחוז כשבר עשרוני.

לא ניתן להפעיל את האחוז כאופרטור בפתרון בעיה של מציאת החלק מהשלם אלא רק על ידי הפיכתו לשבר פשוט או עשרוני!

פירושו של הדבר שכפל 5600 ב – 54 לא יוביל לתוצאה הנדרשת.

מציאת השלם על פי חלקו כשהיחס נתון באחוזים

בעיה לדוגמה :

בחנות יש 750 כדורים צהובים, שהם 15% מכלל הכדורים שבחנות. כמה כדורים בחנות?

נבחן דרכים שונות לפתרון הבעיה :

<u>הפתרון על ידי הבאה ליחידה</u>

פתרון זה הוא הבסיס לכל יתר הדרכים לחישוב השלם על פי חלקו, הוא מספק את ההסבר לחישוב הפתרונות בדרכים השונות ואת הכלים לפתרון בעיות סבוכות. לכן, חשיבותו רבה ביותר. בלעדיו לא ניתן להבין מדוע נעשה שימוש באחוז כאופרטור.

750 הם 15%.

כדי לחשב את ערכו של אחוז אחד נחלק את 750 ל – 15.

ערך אחוז אחד (ערך היחידה) הוא : 50 = 15 : 750 .

כדי למצוא כמה כדורים יש בחנות בסך הכל, עלינו לחשב ערכם של 100% , כלומר, לכפול את 50

ב – 100 .

נקבל שבחנות יש בסך הכל 5000 כדורים.

<u>הפתרון של הבעיה מבלי להפוך את האחוז לשבר עשרוני או לשבר פשוט</u>

$$\frac{750\times100}{15}=5000$$

זהו אותו פתרון של מציאת ערך היחידה, אך ללא שלבי הביניים.

<u>הפתרון של הבעיה כאשר האחוז הוא אופרטור הכתוב בשיטה העשרונית</u>

למדנו שכדי לחשב את השלם על פי חלקו, נחלק את הנתון הכמותי (את החלק) ביחס הנתון.

צעד ראשון לפתרון בדרך זו יהיה כתיבת האחוזים כשבר עשרוני.

0.15 = 15%

נחלק את 750 ב – 0.15 ונקבל את מספר הכדורים הכולל שבחנות, שהוא השלם המבוקש.

750 : 0.15 = 5000

בחנות יש 5000 כדורים.

מציאת האחוז

כאשר נתונים שני גדלים כמותיים ומבקשים שנחשב את היחס שביניהם כשהוא מבוטא באחוזים עלינו למצוא קודם כל את היחס בביטויו כשבר פשוט ואחר כך לתרגמו לאחוזים.

בעיה להדגמה:

בחורשה יש 250 עצים 45 מהם עצי פרי. מה אחוז עצי הפרי שבחורשה?

כל עץ מהווה 1/250 מכלל עצי החורשה.

45 עצים הם 45/250 מכלל עצי החורשה.

כדי לבטא יחס זה באחוזים, נכפול אותו ב – 100 .

התרגיל יהיה:

$$\frac{45\times100}{250}=18\%$$

אם נתבקש למצוא ***איזה חלק*** מעצי החורשה מהווים עצי הפרי, נוכל לתת את התשובה בשבר פשוט.

כפי שלמדנו, יחס מבוטא בצורתו המצומצמת, לכן התשובה בשברים פשוטים תהיה:

$$\frac{45}{250}=\frac{9}{50}$$

אפשר, אף כי אין זה מקובל, לבטא את היחס בשבר עשרוני באחת הדרכים שלמדנו, ולקבל שעצי הפרי הם 0.18 מכלל עצי החורש.

3 הבעיות שהודגמו :
מציאת החלק מהשלם,
מציאת השלם על פי חלקו,
מציאת היחס.
הן הבסיס להבנת בעיות מסובכות יותר, שפתרונן ידגיש את חשיבות האחוזים וידגים מדוע בכל העולם מעדיפים לבטא יחסים באמצעות אחוזים.

השלם, מערכת התייחסות, יותר משלם ופחות משלם בשברים פשוטים, השבר המדומה, בשברים עשרוניים ובאחוזים

<u>מהו השלם?</u>

זיהוי השלם שביחס אליו נעשות הפעולות החשבוניות הוא תנאי הכרחי, אף כי לא מספיק, ליצירת תובנה מתמטית.
נתבונן בשתי בעיות :
א.
בתערוכת ציורים יש 420 מוצגים. 2/3 מהם הם רישומים. כמה רישומים בתערוכה?
ב.
2/3 מהמוצגים בתערוכה הם רישומים. מספר הרישומים הוא 420. כמה מוצגים בתערוכה?

התובנה שהשלם הוא כלל המוצגים מאפשרת את ההבנה שבעיה א׳ עוסקת במציאת החלק מהשלם ואילו בעיה ב׳ עוסקת במציאת השלם על פי חלקו. בבעיה א׳ 420 המוצגים הם השלם הנתון, לעומת המספר 420 בבעיה ב׳, שהוא החלק, ועלינו לחפש את השלם. תיוג סוג הבעיה הוא שלב ראשוני מתבקש כדי להגיע לפתרון. בשתי הבעיות השלם הוא המספר הכולל של המוצגים בתערוכה והחלק הוא מספר הרישומים בתערוכה.
איתור וזיהוי השלם נדרש בין אם הנתונים הם בשבר פשוט או בשבר עשרוני או באחוזים. זוהי אותה הבחנה שיש לעשותה בין השבר האמיתי הקטן מ – 1, לבין השבר המדומה, השווה ל – 1 או גדול ממנו לבין המספר המעורב.

הבחנה בין שבר אמיתי, הקטן מ – 1 לבין שבר מדומה הגדול מ – 1 או שווה לו , מצריכה הבחנה בין השלם לבין מספר הגדול או הקטן ממנו.

כל הביטויים :

$1 = 100\% = 1.00$

מציינים את השלם.

לעיתים השלם הוא קבוצה, כמו בבעיה א' ובבעיה ב', לעיתים הוא גודל רציף כמו בבעיה הבאה :

ג.

על 35% משטחו של מבנה בנו חדרי שינה. יתר השטח היה מיועד לחדרי אוכל ושירותים. איזה חלק מהמבנה היה מיועד לחדרי אוכל ושירותים?

השלם פה הוא גודל המבנה שהוא גודל רציף. איננו יודעים דבר על מידותיו או על צורתו או על ייעודו.

<u>בעיות שבהן יש שלמים אחדים</u>

נתבונן בבעיה הבאה :

ד.

בגד התייקר ב – 40% ממחירו ואחר כך הוזל ב – 40% ממחירו החדש. מתי כדאי לקונה לרוכשו לאחר ההתייקרות, לאחר ההוזלה, או אולי לפני שני אלה?

השלם הראשון שמהווה ***מערכת התייחסות*** הוא המחיר לפני ההתייקרות. בתור כזה הוא 100%.

לאחר ההתייקרות נוצר ***שלם חדש*** שמכיל 140% . ההוזלה מחושבת ***ביחס אליו***.

המחיר לאחר ההוזלה מהווה 60% ***מערכו של השלם החדש***.

60 אחוזים של 140% הם 84% ***מהשלם הראשון***.

זוהי בעיה המטפלת ביחסי יחסים : היחס בין השלם השני ביחס לראשון, היחס בין השלם השלישי ביחס לשלם השני שערכו נקבע ביחס לשלם הראשון, ובסופו של דבר, היחס בין השלם השלישי ביחס לשלם הראשון.

המחיר לאחר ההוזלה מהווה 84 אחוזים מהמחיר המקורי .

כדאי לקונה לחכות להוזלה ואז לרכוש את הבגד, כי 84% הם פחות מ – 100%(המחיר הראשוני) ובוודאי פחות מ – 140%(המחיר לאחר ההתייקרות).

את בעיה ד' אפשר לנסח באמצעות שברים פשוטים :

ד1.

בגד התייקר ב – 2/5 ממחירו ואחר כך הוזל ב – 2/5 ממחירו החדש. מתי כדאי לקונה לרוכשו לאחר ההתייקרות, לאחר ההוזלה, או אולי לפני שני אלה?

השלם הראשון שמהווה מערכת התייחסות הוא המחיר לפני ההתייקרות. בתור כזה הוא 1.

לאחר ההתייקרות נוצר שלם חדש שהוא מספר מעורב $\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$ שאפשר לבטא אותו באמצעות שבר מדומה. ההוזלה מחושבת ביחס אליו.

המחיר לאחר ההוזלה מהווה 3/5 מערכו של השלם החדש.

3/5 של 7/5 הם : $\frac{21}{25}=\frac{7}{5}\times\frac{3}{5}$ שהם 84% **מהשלם הראשון**. רישום השבר 21/25 באחוזים מתאפשר על ידי הרחבה שלו ב – 4 או על ידי הכפלה שלו ב - 100.

כפי שראינו הניסוח של בעיה ד1 אינו משנה את אופייה של בעיה ד'.

זוהי בעיה המטפלת ביחסי יחסים :

1) היחס בין השלם השני לראשון,

2) היחס בין השלם השלישי ביחס לשלם השני, שערכו נקבע ביחס לשלם הראשון,

3) בסופו של דבר, היחס בין השלם השלישי ביחס לשלם הראשון.

המחיר לאחר ההוזלה מהווה 84 אחוזים(21/25) מהמחיר המקורי .

כדאי לקונה לחכות להוזלה ואז לרכוש את הבגד, כי 21/25 הם פחות מ – 1 ובוודאי פחות מ – 7/5 .

את בעיה ד' אפשר לנסח גם באמצעות שברים עשרוניים :

ד2.

בגד התייקר ב – 0.4 ממחירו ואחר כך הוזל ב – 0.4 ממחירו החדש. מתי כדאי לקונה לרוכשו לאחר ההתייקרות, לאחר ההוזלה, או אולי לפני שני אלה?

או :

בגד התייקר ב - 4 עשיריות ממחירו ואחר כך הוזל ב – 4 עשיריות ממחירו החדש.

מתי כדאי לקונה לרוכשו לאחר ההתייקרות, לאחר ההוזלה, או אולי לפני שני אלה?

השלם הראשון שמהווה מערכת התייחסות הוא המחיר לפני ההתייקרות. בתור כזה הוא 1.

לאחר ההתייקרות נוצר שלם חדש שהוא המספר המעורב : 1.4 של המחיר הראשוני.

ההוזלה מחושבת ביחס אליו.

המחיר לאחר ההוזלה מהווה 0.6 מערכו של השלם החדש :

כדי למצוא איזה חלק מהווה המחיר הסופי מהמחיר החדש עלינו לכפול 0.6 ב – 1.4 ולקבל 0.84 , שהם 84% **מהשלם הראשון**.

נגיע לאותה מסקנה :

כדאי לקונה לחכות להוזלה ואז לרכוש את הבגד, כי 84 מאיות מהמחיר המקורי הם פחות מ – 1 ובוודאי פחות משלם ו – 4 עשיריות.

השלמים והיחסים ביניהם אינם מושפעים מההצגה השונה של היחסים. נתוני הבעיה יכולים להינתן באחוזים, בשברים פשוטים או בשברים עשרוניים, אבל אין להצגות השונות כל השפעה על מהות היחסים בין מרכיבי הבעיה. כדי להבין את הבעיה חייבים להבין את מהות השלם.

אפשר, כמובן, לפתור בעיה זו תוך הסתמכות על השבר העשרוני כאופרטור, אז הפתרון יהיה:

$$1.4 \times 0.6 = 0.84$$

זהו פתרון טכני, שאינו מעיד על הבנת הבעיה. הוא נוח לשימוש במחשבון, אבל תרומתו לפיתוח החשיבה המתמטית מזערית.

כדי להבין את הפתרון הזה חייבים להבין את המשמעות של מערכת ההתייחסות, כלומר, את המשמעות של השלם.

<u>מציאת השלם או החלק על פי הפרש החלקים</u>

נתבונן בבעיות הבאות:

ה.

ילד קיבל סכום כסף במתנה. ב – 2/5 ממנו קנה משחק וב – 2/7 ממנו קנה תיק.

המשחק עלה ב – 32 ₪ יותר מהתיק. כמה כסף נשאר לילד מסכום המתנה שקיבל?

לעומת הבעיה:

ו.

ילד קיבל סכום כסף במתנה. ב – 2/5 ממנו קנה משחק וב – 2/7 מהכסף שנותר לו לאחר קניית המשחק קנה תיק.

המשחק עלה ב – 32 ₪ יותר מהתיק. כמה כסף נשאר לילד מסכום המתנה שקיבל?

נעקוב אחר הפתרון של בעיות ה׳ – ו׳:

פתרון בעיה ה׳

בבעיה ה׳ השלם נשאר סכום הכסף שהתקבל כמתנה.

נחשב את ההפרש בחלקים בין מחיר המשחק למחיר התיק.

$$\frac{2}{5}-\frac{2}{7}=\frac{14-10}{35}=\frac{4}{35}$$

32 השקלים מהווים 4/35 מסכום המתנה.

ערכו של החלק ה – 1/35 יחושב על ידי חילוק 32 ב – 4.

8 ש״ח = 4 :32₪

נחשב בחלקים את סכום ההוצאה על המשחק ועל התיק.

$$\frac{2}{5}+\frac{2}{7}=\frac{14+10}{35}=\frac{24}{35}$$

נחשב בחלקים את הכסף שנותר.

$$1-\frac{24}{35}=\frac{11}{35}$$

כל חלק 1/35 הוא 8 ₪ , כדי למצוא מה ערכם של 11 חלקים כאלה, נכפול את 11 ב – 8.

11 X ₪ 8 = ₪ 88

לילד נותרו 88 שקלים מכספי המתנה.

נשווה את פתרון בעיה ה׳ לפתרון בעיה ו׳.

פתרון בעיה ו׳

בבעיה ו׳ יש שלם שהוא הסכום הכולל של המתנה.

בשלב השני 3/5 שהיה חלק המתנה שנותר לאחר ההוצאה על המשחק, הופך להיות שלם בפני עצמו. ממנו מחשבים כמה הם 2/7 שלו.

כלומר, מצד אחד 3/5 הוא שלם העומד בפני עצמו, מצד שני הוא חלק מהשלם הכולל. חישוב 2/7 ממנו ייעשה על ידי הכפלתו ב – 2/7.

$$\frac{2}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{35}$$

מחיר התיק הוא 6/35 מהשלם הכולל, כלומר, מהסכום הכולל של המתנה.

כדי לפתור בעיה זו עד תומה עלינו למצוא את ערך החלק על ידי מציאת הערך של יחידה אחת כלומר, ערכו של 1/35.

גם בעיה ה׳ וגם בעיה ו׳ עוסקות ***במציאת השלם או החלק על פי הפרש החלקים***.

ב – 2/5 מהכסף קנה הילד משחק ב – 6/35 מהכסף הוא קנה תיק.

המשחק עלה ב – 32 ₪ יותר מהתיק.

נחשב את ***ההפרש בחלקים*** בין מחיר המשחק למחיר התיק :

$$\frac{2}{5}-\frac{6}{35}=\frac{14-6}{35}=\frac{8}{35}$$

ההפרש הזה ***בכמויות*** הוא 32 ₪.

כלומר, 32 ₪ הם 8/35 חלקים מהשלם.

זהו תרגיל הדומה לתרגיל של מציאת השלם על פי חלקו. על ידי חלוקת 32 ב – 8 נקבל שערכו של החלק 1/35 מהסכום הכולל הוא 4 ₪.

עלינו למצוא איזה חלק מהסכום הכולל נשאר בידי הילד.

לצורך זה נחשב את ***סכום החלקים*** הכולל שהילד כבר הוציא.

$$\frac{2}{5}+\frac{6}{35}=\frac{14}{35}+\frac{6}{35}=\frac{20}{35}$$

נשארו בידיו 15/35 חלקים מסכום המתנה, לפי החישוב :

$$1-\frac{20}{35}=\frac{15}{35}$$

כל חלק של 1/35 שווה 4 ₪, לכן 15 חלקים כאלה הם 60 ₪ = 4 ₪ X 15

לילד נשארו 60 ₪ לאחר שקנה את המשחק ואת התיק.

זוהי בעיה מורכבת שכדי לפתור אותה חייבים להבין את משמעות השלם ואת משמעות ***הפרש החלקים*** לעומת ***הפרש הכמויות***. פתרון טכני המסתמך על האופי של השבר כאופרטור לא ייחלץ אותנו מסבך הבעיה.

פתרון בעיה כזו של מציאת השלם או חלקים ממנו על סמך הפרש החלקים כשהנתונים הם באחוזים קל בהרבה, בגלל העובדה שהאחוז הוא מאית ומראש יש לנתונים מכנה משותף.

נבחן בעיה של מציאת השלם או החלק על פי הפרש החלקים כשהנתונים מבוטאים באחוזים :

ז.

ילד קיבל סכום כסף במתנה. ב – 40% ממנו קנה משחק וב – 28% מהכסף שנותר לו לאחר קניית המשחק קנה תיק.

המשחק עלה ב – 52 ₪ יותר מהתיק. כמה כסף נשאר לילד מסכום המתנה שקיבל?

פתרון בעיה ז'

לאחר ההוצאה של 40% נותרו בידי הילד 60% מסכום המתנה.

נחשב כמה הם 28% מ – 60% .

לצורך החישוב נוכל להשתמש בתכונת האחוז כאופרטור על ידי הפיכתו לשבר עשרוני.

0.28 X 60 = 16.8

(60 האחוזים הם השלם שמתוכו מחשבים את 28 האחוזים.)

16.8% מכספו הוציא הילד על התיק.

ההפרש באחוזים בין ההוצאה על התיק לבין ההוצאה על המשחק הוא :

40 % – 16.8 %= 23.2%

ההפרש במחיר הוא 52 ₪. כלומר, 52 השקלים הם 23.2 אחוזים. נקבל את ערך האחוז האחד על ידי חילוק 52 ב – 23.2 ונמצא שערכו של אחוז אחד הוא בערך 2.24 ₪.

ההוצאה על התיק ועל המשחק ביחד היא באחוזים 56.8% = 16.8% + 40%

נשארו לילד 43.2% = 56.8% - 100% לאחר שקנה את המשחק ואת התיק .

נכפול את ערך האחוז האחד במספר האחוזים שנותרו ונקבל כמה כסף נותר לילד מהמתנה לאחר שקנה את המשחק ואת התיק.

43.2 X ₪ 2.24 = ₪ 96.77

נמצא שהסכום שנותר בידי הילד הוא בערך 96.77 ₪.

כדי להתגבר על הקשיים שמציגה בעיה כזאת, אנחנו נעזרים גם בתכונת האחוז כאופרטור. ברור, ששימוש כזה יכול להתבצע אך ורק אם מובנת משמעות השלם, ומשמעות האחוז כמאית.

יותר ופחות משלם

בעיות אלה הן משני סוגים :

1. בעיות *שנתוניהן* נקובים בערכים שהם יותר ופחות מהשלם והפותר חייב בראש ובראשונה לזהות את השלם ;

2. בעיות שמחייבות *מציאת* ערכו של *גודל שהוא יותר או פחות מהשלם.*

להלן מספר דוגמאות מלוות בפתרונות.

ט.

מספר התושבים ביישוב קטן עלה ב – 10% בשנה האחרונה. מספרם בתחילת השנה היה 8120. מהו מספרם בסוף השנה?

השלם 100% הוא מספר התושבים בתחילת השנה.

לאחר התוספת מספר התושבים הוא 110% .

החישוב

פתרון בדרך אחת

$$\frac{8120\times110}{100}=8120\times\frac{110}{100}=8120\times1.1=8932$$

פתרון בדרך שנייה

יש תלמידים שמחשבים קודם את ערך התוספת ומוסיפים אותה למספר המקורי של התושבים.

10% של 8120 הם 812 .

$8120 + 812 = 8932$

לאחר הגידול במספר התושבים יש ביישוב 8932 תושבים.

זו תשובה נכונה ואפילו יעילה בנתונים הספציפיים של הבעיה שלנו, אבל היא אינה מספקת מענה לבעיות אחרות שעוסקות ביותר משלם, או בפחות ממנו, כפי שנראה להלן.

י.

הבלאי השנתי של ספרי קריאה בספרייה ציבורית הוא 12% לשנה מכלל הספרים בספרייה. בתחילת השנה היו בספרייה 185,750 ספרים. מה מספר הספרים התקינים בסוף השנה?

פתרון בדרך אחת

בתחילת השנה היו בספרייה 185,750 ספרים, שהם השלם שלנו (100%).

בסוף השנה היו 88% מכלל הספרים במצב תקין.

נחשב את ערכם של 88 האחוזים האלה:

$$\frac{185750 \times 88}{100} = 185750 \times 0.88 = 163{,}460$$

פתרון בדרך שנייה

אפשר, כמובן, לחשב את ערכם של 12 האחוזים מ – 185,750 ולהפחיתו מהמספר המקורי של ספרי הספרייה, אבל פתרון כזה נותן מענה רק למספר מוגבל של בעיות.

נתבונן בבעיות שהנתונים הכמותיים שלהם הם יותר או פחות משלם.

י״א.

מספר התושבים ביישוב קטן עלה ב – 10% בשנה האחרונה. מספרם בסוף השנה היה 8932. מה היה מספרם בתחילת השנה?

הפתרון של בעיה כזו מחייב את הפותר להקדים ולחבר את עשרת האחוזים ל – 100% של הגודל המקורי (הגודל היסודי). אי אפשר לפתור בעיה כזו על ידי חישוב ערכם של 10% בנפרד, כי לא נתון לנו השלם שממנו נוכל לחשב את הערך של עשרת האחוזים. מסיבה זו כדאי להעדיף גם בבעיות ט׳ י׳ את הדרך הראשונה המוצעת.

כלומר, את חישוב האחוזים כצעד ראשון של הפתרון ולא את חישוב הכמויות.

סיבה נוספת להעדפת הדרך השנייה של הפתרון:

הנחיית התלמידים לחיבור וחיסור של אחוזים ולא רק של כמויות תורמת להעלאת רמת ההפשטה של החשיבה המתמטית.

החישוב יהיה

$$\frac{8932 \times 100}{110} = 8120$$

י״ב

הבלאי השנתי של ספרי קריאה בספרייה ציבורית הוא 12% לשנה מכלל הספרים בספרייה. בסוף השנה היו בספרייה 163,460 ספרים במצב תקין. מה מספר הספרים התקינים בתחילת השנה?

פתרון בעיה י״ב

הגודל היסודי (השלם) שאליו מתייחסים אינו נתון.

לעומת זאת נתון ערכם של 88% מכלל הספרים.

חלוקת 163,460 ב – 88 תיתן ערכו של אחוז אחד.

כדי למצוא את ערך השלם נכפול ערך האחוז האחד ב – 100.

החישוב:

$$\frac{163460 \times 100}{88} = 185750$$

בספרייה היו בתחילת השנה 185750 ספרים תקינים.

חישוב בעיות כאלה כשהנתונים הם בשברים ולא באחוזים יכביד על הפתרון.

יהיה צורך להשתמש בתכונת האחוז כאופרטור, כמודגם:

$$\frac{163460 \times 100}{88} = 163460 : 0.88 = 185750$$

<u>כיצד נדגים את עדיפות החישוב באחוזים לעומת החישוב באמצעות שברים?</u>

נתבונן בבעיה י״ג.

י״ג 1.

אדם הוציא 40% מכספו על מזון ובגדים.

25% מכספו הוא הוציא על שכר דירה. המזון והבגדים עלו ב – 3900 ₪ יותר משכר הדירה.

כמה כסף היה לו לפני ההוצאות?

כמה כסף נשאר לו?

הפתרון באחוזים

ההפרש באחוזים

40% - 25% = 15%

ההפרש בכמות: 3900

ערך אחוז אחד:

3900 : 15 = 260 ₪

ערך 100% (השלם) :

$100 \times 260 = 26000$ ₪

היו לו 26000 שקלים לפני ההוצאה.

סכום ההוצאה באחוזים

$40\% + 25\% = 65\%$

נשארו לו באחוזים

$100\% - 65\% = 35\%$

נשארו לו

$26000 \times 0.35 = 9100$

נשארו לו 9100 ₪.

נשווה פתרון זה לפתרון של אותה בעיה <u>בדיוק</u> שנתוניה הם בשברים פשוטים.

י״ג 2.

אדם הוציא 2/5 מכספו על מזון ובגדים.

1/4 מכספו הוא הוציא על שכר דירה. המזון והבגדים עלו ב – 3900 ₪ יותר משכר הדירה.

כמה כסף היה לו לפני ההוצאות?

כמה כסף נשאר לו?

הפתרון בשברים

ההפרש בחלקים המבוטא בשברים

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{8-5}{20} = \frac{3}{20}$$

ההפרש בכמות : 3900

ערכו של החלק ה – 20, כלומר ערכו של 1/20 מהסכום הכולל.

$3900 : 3 = 1300$ ₪

ערכו של השלם יחושב על ידי הכפלת 1300 ב – 20

$20 \times 1300 = 26000$

לפני ההוצאות היו לו 26000 ₪.

כדי לחשב כמה כסף נשאר לו , נחשב איזה חלק מכספו נשאר לו.

הוא הוציא בסך הכל

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{8+5}{20} = \frac{13}{20}$$

החלק מכספו שנשאר לו הוא

$$1-\frac{13}{20}=\frac{20}{20}-\frac{13}{20}=\frac{7}{20}$$

נחשב את ערכם של 7/20 מהשלם

$$\frac{26000\times 7}{20}=9100$$

נשארו לו 9100 ₪ .

עיון מפורט בשני הפתרונות מדגיש את הנוחיות של החישוב באחוזים לעומת החישוב בשברים פשוטים.

נחזור לבעיה שהצגנו בפרק הראשון:

שרה מרוויחה ב – 30% יותר מיוסי. בכמה אחוזים מרוויח יוסי פחות משרה?

הפרק הראשון עסק בשבר הפשוט, אף על פי העדפנו לצורך הדגמה להציג בעיה באחוזים, כי הבחירה באחוזים פישטה את ההסבר.

נבחן בעיה דומה שנתוניה יהיו בשברים פשוטים ונראה עד כמה קל יותר להסבירה באמצעות אחוזים לעומת הפתרון באמצעות השברים.

שרה מרוויחה ב – 2/5 יותר מיוסי. באיזה חלק מרוויח יוסי פחות משרה?

הפתרון:

יוסי מרוויח 5/5 שרה מרוויחה 7/5 .

<u>שכרו של יוסי</u>	<u>שכרה של שרה</u>
5/5	7/5

היחס בין השכר של שרה למשכורת של יוסי הוא 5 : 7 .

לפי זה יוסי מרוויח ב – 2/7 פחות **מ**שרה.

ההסבר:

ההפרש בין מה שמרוויח יוסי למה שמרוויחה שרה הוא 2 יחידות.

2 יחידות הן 2/5 **ביחס** לשלם המכיל 5 יחידות כאלה, כי הן 2 מתוך 5.

אותן 2 היחידות הן 2/7 **ביחס** לשלם המכיל 7 יחידות כאלה, כי הן 2 מתוך 7.

אנחנו מחליטים מהו היחס המתבקש בהתאם לשלם שאליו מתכוונים: אם אומרים בכמה יוסי משתכר **יותר מ**שרה, נקבעת משכורתה של שרה כשלם. אם אומרים בכמה שרה משתכרת **יותר מ**יוסי, נקבע משכורתו של יוסי כשלם.

אותה בעיה עם אותם המספרים בדיוק, כאשר הם מבוטאים באחוזים תיראה כך:

שרה מרוויחה ב – 40% יותר מיוסי. באיזה אחוז מרוויח יוסי פחות משרה?

הפתרון

<u>שכרו של יוסי</u>	**<u>שכרה של שרה</u>**
100%	140%

ההפרש באחוזים הוא 40%

40 מתוך 140 הם בערך 28.57 .

40 מתוך 100 הם 40.

שכרו של יוסי קטן משכרה של שרה ב – 28.57% שהם 2/7.

נבחן את היתרונות ואת החסרונות של כל דרך של הצגה.

ההצגה בשברים

מצד אחד, השינוי במכנה של היחס מ - 5 ל - 7 מקשה על ההבנה.

מצד שני, הפתרון בשברים עדיף על הפתרון באחוזים כי השינוי במכנה מדגיש את המעבר ממערכת התייחסות אחת לשנייה.

ההצגה באחוזים

מצד אחד, הפתרון באחוזים נוח יותר להבנה בגלל המכנה המשותף שהוא 100, ובגלל הרלוונטיות שלו לבעיות רבות.

מצד שני, המכנה של האחוזים שהוא 100 מחייב לעיתים עיגול האחוזים, כמו בדוגמה של פתרון הבעיה שלפנינו.

עם זאת, בחירת המאית כיישות העומדת בפני עצמה, איפשרה שימוש באחוז **כיחידת מידה גמישה** בעלת כל התכונות של השבר הפשוט והשבר העשרוני, המאפשרת פתרון נוח ומהיר גם של בעיות מורכבות .