חשיבותם של ניסוחים מפורשים

כתב: פרופ' רון אהרוני*

סיפור אישי

בני לומד עתה בכיתה יא' נגזרות. לנגזרת יש הרבה משמעויות, שהבסיסית ביניהן היא "קצב השינוי של הפונקציה". (לקורא שאינו מכיר את מושג הנגזרת – אין לכך חשיבות של ממש. מדובר בעיקרון, ואותו אפשר להבין גם בלי התייחסות למשמעות של המושג הספציפי.) בארץ מלמדים רק משמעות אחת של הנגזרת, שהייתה אמורה להיות בסך הכול שימוש צדדי, ועיקר חשיבותה הוא בהמחשת רעיון קצב השינוי: שיפוע המשיק לגרף של הפונקציה. אחרי שלומדים את המובן הזה (מקדישים לכך בערך שעה) פותרים אינספור תרגילים, חלקם מתוחכמים, שכולם מתייחסים למשמעות הזאת. בני התקשה בפתרון התרגילים. הוא ידע, בצורה טכנית לחלוטין, לגזור פונקציות. אבל הוא לא ידע מה לעשות עם הנגזרת. לא היה לו ברור שבכל נקודה יש נגזרת שונה, ושצריך להציב את ערך ה-x שבו גוזרים, כדי לקבל את ערך הנגזרת בנקודה הספציפית. הוא ידע באופן מעורפל ששיפוע המשיק הוא הנגזרת. אבל הוא לא ידע להגדיר מה זה "משיק", או "שיפוע", והוא לא ידע לנסח את הכלל: "שיפוע המשיק הוא הנגזרת בנקודת ההשקה". לבני היה חסר דבר פשוט מאוד: שידברו איתו. שינסחו איתו יחד כללים וידונו איתו בהם. בלימודי המתמטיקה בארץ חסר הגורם הזה בצורה נואשת.

שתי הרגליים של ההבנה

שתי רגליים יש להבנה: תרגול, וניסוח של מושגים ושל חוקים. כמובן, התרגול חשוב ביותר. הוא מקנה שליטה ומיומנות, ומהווה בדיקה להבנה. אבל גם הצד השני מהותי, ובלימודי המתמטיקה בארץ הוא מוזנח לחלוטין. כמה מסיימי בית ספר יסודי בארץ מסוגלים לומר את המשפט "אם מכפלת שני מספרים היא 0, אז אחד מהם הוא 0"? כמה מהם מסוגלים לומר, או אפילו להבין את הניסוח "בתרגיל חיסור, אם מגדילים את המחסר ב-2 אז ההפרש קטן ב-2"? כמה מהם יודעים להשתמש במונחים "מכפלה", "מחסר", "מחוסר", "הפרש"? כמה מסיימי תיכון יודעים להסביר מה זו "אלגברה"? כמה מהם יודעים להגדיר במילים "נגזרת"? או להסביר במפורש מהי השיטה העשרונית? בלי היכולת לנסח את כל אלה הידע שלהם הוא במקרה הטוב טכני, ואי אפשר לבנות עליו את הנדבכים הבאים. בלי ניסוחים מפורשים אין הבנה, ואין תקשורת.

זוהי השנה השביעית של עבודתי בבית הספר היסודי, וכל שנה אני מבין טוב יותר עד כמה חשובים המונחים וניסוח החוקים. המונחים הם נקודות אחיזה, ובלעדיהם אין הבנה. **סביבה מעשירה היא סביבה שמספקת מונחים**. ככל שההורים מתייחסים למצבים אנושיים במונחים מתוחכמים יותר כך הילד מרחיב את עולמו. למשל, כל ילד מכיר במעומעם את ההבדל בין "אמיתי" ל"מזויף". אבל ילד שבביתו מתייחסים במפורש להבחנה הזאת מתעשר ביכולת תקשורת, ובחידוד כלי ההבחנה שלו. כך גם במתמטיקה: ככל שהמורה מתייחס לחומר במונחים מדויקים ומעמיקים יותר, כך מעמיקה ההבנה.

במאמר הזה אני רוצה לדון בניסוחים המפורשים מכמה זוויות. אינני מתיימר בכך לגלות את אמריקה. זה אינו מאמר מחקרי, אלא מאמר שאומר את המובן מאליו. מתברר שנחוץ לומר את המובן מאליו, משום שהעקרונות שיידונו כאן אינם מיושמים בחינוך הישראלי. למשל, בתוכנית הלימודים של בית-הספר היסודי בארץ

מושמטים במכוון המונחים "כופל" ו"נכפל", "מחסר" "מחוסר" ו"הפרש". כשמגיעים לבית הספר העל-יסודי המצב גרוע בהרבה. כיום שולט שם תרגול ללא הבנה, ועם דגש מועט על ניסוחים.

דקויות של משמעות וריבוי משמעויות

אפתח בנושא שאולי איננו כל כך מובן מאליו: חשיבות ההבחנה בדקויות של משמעות. פירושן של דקויות הוא שלאותו מושג יכולות להיות משמעויות רבות. מתוך עבודתי בעמותה שבה אני חבר התברר לי דבר מוזר: ככל שהתלמיד מתקשה יותר, כן חשובות לו יותר ההבחנות האלה. דווקא לקויי למידה זקוקים לניסוחים של דקויות.

דוגמה שלשמחתי כבר מוכרת למדי בחינוך המתמטי בישראל היא קיומם של סוגים שונים של חיסור. על בקשה לסיפור שבו נחוץ חיסור, משיבים רוב בני האדם באותו סוג של סיפור: "ליוסי היו 5 בלונים, 2 התפוצצו, כמה נשארו לו?" סוג זה של חיסור נקרא "גריעה". בגריעה נעלמים דברים: בלונים מתפוצצים, סוכריות נאכלות, מכוניות מתקלקלות, פרחים נובלים. אבל יש עוד סוג של סיפורי חיסור. למשל: "בחצר 5 ילדים. 2 מהן בנות. כמה בנים יש בחצר?" בסיפור הזה שום דבר לא נעלם. יש עצמים משני סוגים, אנו יודעים כמה יש יחד וכמה יש מסוג אחד, ושואלים כמה יש מן הסוג השני. עוד סוג של חיסור הוא השוואה: לרותי 5 תפוחים, ליוסי 2. כמה תפוחים יש לרותי יותר מאשר ליוסי? ויש עוד סוגים של חיסור.

ייתכן שחלק גדול מן התלמידים לומדים לזהות את שני המצבים, של גריעה ושל הפרדה, כדורשים חיסור. אבל ההבחנה בין שני הסוגים היא במקרה הטוב מעורפלת ומעומעמת. והבנה מעורפלת אינה דומה כלל להבנה מפורשת. גם אין דומה הבנה בכיתה א׳, שעליה ייבנו הבנות אחרות בכיתות הבאות, להבנה שבאה רק במאוחר.

דוגמה שלצערי יש פחות הבנה לחשיבותה היא ההבדל בין כופל ונכפל. "2 פעמים 3" פירושו "3+3"; "3 פעמים 2", לעומת זאת, פירושו "2+2+2". להבחנה הזאת יש חשיבות רבה כאשר מגיעים לחילוק, שם צריך להבין שלפעולה 6:2 יש שתי משמעויות – חלוקה ל-2 קבוצות, ושאלה מהו גודל כל אחת מהן (זהו "חילוק לחלקים"), וחילוק לקבוצות בגודל 2, ושאלה כמה קבוצות יש (זהו "חילוק להכלה"). לכך נחזור בהמשך.

יש סיבות רבות לחשיבות ההבחנה המפורשת בדקויות. האחת היא שזהו נכס חשיבה כללי לחיים: לדעת שכדאי לחפש ריבוי משמעויות למושגים הוא עניין מועיל מאוד. סיבה אחרת היא שזוהי הזדמנות לדון במשמעות של החיסור, ולהביא את הילד למודעות למושג המשמעות, ולכך שלאותה פעולה יכולות להיות יותר ממשמעות אחת. במילים אחרות, זוהי הזדמנות לרפלקסיה על החשיבה שלו. לסיבה נוספת אני רוצה להקדיש סעיף נפרד, משום שמדובר בחוק כללי על הוראה.

הכלל של בואס (Boas)

המתמטיקאי האמריקאי רלף בואס לימד בימי מלחמת העולם השנייה טכנאים של נושאות מטוסים. בין השאר, חלק מן הטכנאים למדו מקצוע מתקדם, שנקרא "משוואות דיפרנציאליות" (משוואות שכוללות נגזרות – הנה, שוב, מושג הנגזרת חוזר. הוא יחזור גם פעם שלישית). מפקדיהם של הטכנאים שסיימו את הקורס סיפרו על תופעה מעניינת. אף על פי שלא היה לטכנאים שום צורך במשוואות דיפרנציאליות במסגרת עבודתם, אלו שלמדו משוואות דיפרנציאליות הצליחו יותר בעבודתם מאשר אלו שלא למדו. הסברו של בואס היה זה: כדי להבין מושגים, אין

די בלימוד. צריך להשתמש בהם. כאשר לומדים משוואות דיפרנציאליות משתמשים בחומר של הקורס הקודם, שהוא חשבון דיפרנציאלי, וזוהי הזדמנות להבין את הנושא הזה. וחשבון דיפרנציאלי דווקא כן היה נחוץ לטכנאים בעבודתם.

אותו דבר נכון בעניין דקויות של משמעות. לימוד דקויות הוא שלב שני, ולכן הוא נותן הזדמנות להשתמש בשלב הראשון, שהוא הבנה שלפעולות יש משמעות. מי שלומד על סוגי חיסור שונים, ומתרגל את זיהוי הסיטואציות המתאימות, מפנים היטב יותר את עצם קיומן של משמעויות לפעולות.

חזרה לדקויות של משמעות: משמעויות החילוק

אחת הדקויות המפורסמות ביותר של משמעות היא סוגי החילוק השונים. אם הכרת המשמעויות השונות של החיסור היא מועילה, הרי הכרת המשמעויות השונות של החילוק היא חיונית. יש שני סוגי חילוק. הראשון הוא חילוק לחלקים, שבו מחלקים למספר נתון של חלקים, ושואלים מהו גודלו של כל חלק. זהו סוג החילוק שאנשים מורגלים בו יותר. למשל, סיפור חילוק מסוג חילוק זה הוא "חילקתי 6 תפוחים שווה בשווה בין 2 ילדים. כמה קיבל כל ילד?" התרגיל הוא $6:2=3$. במקרה זה $6:2=3$ משום ש-2 פעמים 3 הם 6, כלומר $3+3=6$. סוג החילוק השני הוא "חילוק להכלה". בסוג זה יודעים מהו גודל כל חלק, ושואלים כמה חלקים יש. למשל, "היו לי 6 תפוחים, חילקתי לילדים כך שכל ילד קיבל 2 תפוחים. כמה ילדים היו?" התרגיל הוא שוב $6:2=3$, אבל הפעם הסיבה לכך היא ש-3 פעמים 2 הם 6, כלומר $2+2+2=6$. שימו לב שקודמת להבחנה הזאת הבחנה חשובה אחרת – בין 2 פעמים 3 ובין 3 פעמים 2. בתרגיל 2×3 כדאי להבחין בין גורמי המכפלה: אם מבינים זאת כ"2 פעמים 3" אז ל-2 כדאי לקרוא "כופל", משום שהוא כופל את ה-3, כלומר אומר כמה פעמים יש לקחתו. ל-3 כדאי לקרוא "נכפל", משום שאותו כופלים.

ללא ידיעה מהו חילוק להכלה (שהוא הפחות מוכר בין שני סוגי החילוק) אי אפשר להבין את הכלל לחילוק בשברים. למשל, סיפור חשבוני המתאים לתרגיל $3:\frac{1}{2}=6$ הוא: "היו לי שלושה תפוחים, חילקתי בין ילדים וכל ילד קיבל $\frac{1}{2}$ תפוח. כמה ילדים היו?" זהו חילוק להכלה: שואלים כאן כמה פעמים מוכל $\frac{1}{2}$ ב-3. סיפור על חילוק לחלקים במקרה של חילוק בשבר הוא קשה הרבה יותר להבנה.

תמונה כללית

אני אוהב לשאול את תלמידי ח' ו-ט' מהי אלגברה. בדרך כלל התשובה שאני מקבל היא "x-ים". אלגברה היא x-ים. לוקח לי שעה של דיון עם דוגמאות כדי להגיע למסקנה: אלגברה היא קריאה למספרים בשמות (הנה ניסוח מפורש), ושקריאה בשמות נחוצה בשני מקרים: אחד, כשהמספר שעליו אנחנו מדברים אינו ידוע. גם אם ערכו אינו ידוע, אנחנו רוצים לדבר עליו, ולמסור עליו אינפורמציה. במקרה זה המספר נקרא "נעלם". המקרה השני הוא שאנחנו רוצים לדבר על מספר כללי – כל מספר. במקרה זה קוראים למספר "משתנה". הנה, קריאה בשמות. אין לתאר כמה ההבחנה הזאת חשובה. פירושה הוא לדעת מה עושים, ולשם מה מלמדים את האלגברה. חוקרי החינוך אוהבים לדבר על מוטיבציה, ועל שימושים שהילד רואה למושגים. אבל אין צורך ב"שימושים מהחיים". הרבה יותר חשוב להסביר מה בדיוק עושים.

ניסוח של עקרונות

בסעיף זה ארשום כמה דוגמאות לעקרונות שמן הראוי שהתלמיד יידע לאומרם ולהשתמש בהם, ושראויים לדיון בכיתות. יותר חשובה מידיעת העיקרון היא ידיעת המונחים והדרך להשתמש בהם:

בגיל הגן: כשחילקתי את העיגולים לאדום ולכחול מיינתי לפי צבע. כשחילקתי אותם לקטנים ולגדולים מיינתי אותם לפי גודל.

בית הספר היסודי: מכפלת מספר ב-2 נותנת מספר זוגי. מספר הוא זוגי אם הוא סכום של שני מספרים שווים. כדי לדעת כמה עשרות שלמות יש במספר מוחקים את ספרת האחדות. במספר 23 יש 23 אחדות, אבל 20 מהן מקובצות ל-2 עשרות, ונותרו 3 אחדות בודדות, לא מקובצות. במספר 1000 יש 1000 אחדות, שאותן קיבצנו ל-100 עשרות. 100 עשרות הן 10 מאות, שהן אלף אחד. כשכופלים את המונה ואת המכנה של שבר באותו מספר ערך השבר אינו משתנה.

בית הספר התיכון: היחס בין שני גדלים הוא המנה שלהם. בסדרה חשבונית ממוצע האברים הוא הממוצע בין האיבר הראשון והאיבר האחרון. לוגריתם של מכפלת מספרים הוא סכום הלוגריתמים שלהם.

בניות גיאומטריות

הבניות הגיאומטריות הוזנחו לגמרי בארץ. זוהי טעות מכמה בחינות. הבניות הן דרך המלך לחוש את המושגים הגיאומטריים "בידיים", ולהרגיש בהם שליטה. אבל יש להן גם פן חשוב נוסף, של מינוחים. בניות דורשות מינוחים מדויקים ותיאורים מילוליים, גם של עצמים וגם של תהליכים. תלמיד שיודע לקרוא, ואחר כך גם לייצר בעצמו, הוראות כמו "העתק את הזווית ABC כך שהשוק שלה תהיה על הישר L וקודקודה יהיה בנקודה X על הישר" זוכה להבנה של המושגים שנחוצה אחר כך בגיאומטריה הדדוקטיבית.

הערה: אין כל אסון בכך אם ילד בכיתה ז' יידע בניות בלי להוכיח את נכונותן. ההוכחות יכולות לבוא בשלב מאוחר יותר.

אנלוגיות

אין מאיר עיניים מאנלוגיות, והן ראויות לניסוחים מפורשים. למשל, כדאי להכיר בדמיון שבין יחס ההכלה של אחדות בתוך עשרות, או עשרות בתוך מאות, לבין ההכלה של גרמים בקילוגרמים ושל סנטימטרים בדצימטרים ובמטרים. כדאי להכיר בדמיון בין פעולות עם מספרים מעורבים לבין פעולות בשיטה העשרונית.

למשל, שפעולת החיבור $5\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}$ דומה לפעולה $37+55$. בחישוב $37+55$ אנחנו מחברים את האחדות, ועשר מהן מקבצים לעשרת אחת. את העשרת הזאת מצרפים ל- $5+3$ העשרות שבתרגיל. בדומה, בחיבור $5\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}$ מחברים את השברים, ומקבצים מהם שלם אחד, שאותו מוסיפים ל- $5+3$ השלמים שבתרגיל.

הנה עוד שתי דוגמאות:

א. פריטה כמוה כהרחבה בשברים. אחרי הפריטה יש יותר חלקים, וערך של כל חלק קטן יותר באותה מידה. בדומה, צמצום שברים דומה לקיבוץ של עשרות. יש פחות חלקים, אבל כל אחד מהם יותר גדול.

ב. כתיבת תרגיל חיבור או חיסור במאונך היא יצירת מכנה משותף. בעזרתה מחברים את האחדות עם אחדות, עשרות עם עשרות וכו'.

מקורם של מונחים

חשוב לדון במקורות שמותיהם של מונחים. מניין, למשל, הביטוי "x בריבוע"? מדוע קוראים לשבר מדומה "שבר מדומה"? (משום שרק נדמה שהוא שבר, חבוי מאחוריו מספר מעורב. אגב, משרד החינוך החליט לוותר על המונח הזה, משום שלדעתם אין שום דבר מדומה בשבר כזה. נדמה לי שחבל לוותר על המונח היפה הזה). מדוע קוראים למחסר "מחסר" ולמחוסר "מחוסר"? (המחסר עושה משהו למחוסר. זוהי הזדמנות לדון בהטיות סבילות של פעלים מול הטיות פעילות, כמו "מבשל – מבושל".)

או, אם ניקח דוגמה מן האוניברסיטה: כמה מרצים מסבירים לתלמידים שלהם שמקורו של סימן האינטגרל, $\int$, הוא ב-S הלטינית, האות הראשונה של "סכום"? שאינטגרל הוא למעשה סכום, גבול של סכומים סופיים? זאת היה צריך ללמד כבר בבית-הספר התיכון.

מסקנות לגבי החינוך המתמטי בארץ

מדי פעם אני מתנדב ללמד בחטיבות הביניים, ומגלה עד כמה קשה שם קיום שיחה ודיון עם התלמידים. הקשב מועט, ואחרי שיח של כמה דקות אין ברירה אלא לתת לתלמידים משימות תרגול. זו אינה עדות לכך שילדים אינם מסוגלים לקיים שיחה, אלא רק לכך שבארץ אינם מורגלים לכך. הרגלי העבודה היחידנית, או העבודה בקבוצות, ללא שיח כיתתי, אינם מפתחים את כישורי השיחה. תלמידי בית הספר היסודי בישראל מורגלים לעבודה עצמית ולתרגול ללא דיון. גרוע בהרבה מכך: אנחנו מרגילים את המורות של בית הספר היסודי לעבודה כזו. המורות של היום אינן יודעות לקיים שיחה, בין השאר משום שאינן מכירות מספיק לעומק את החומר. אבל צריך לזכור ש**המורות לומדות בדיוק כשם שהילדים לומדים**. הן לומדות מה שהן מלמדות. אם נרגיל אותן לדבר במדויק על מונחים ועקרונות, גם הן ילמדו את החומר יותר לעומקו. וכאשר המצב ישתנה בבתי הספר היסודיים, יגיעו התלמידים הרבה יותר מוכנים לסוג כזה של לימוד בחטיבת הביניים.

* פרופ' רון אהרוני מהטכניון בחיפה מלמד מאז שנת 2000 בבתי ספר יסודיים ועל-יסודיים, חיבר את הספר "חשבון להורים", שהוא מדריך למורים ולהורים בחשבון של בית הספר היסודי.