על החילוק של המספרים הטבעיים/ תלמה גביש

תובנה מתמטית פירושה הבנה של משמעות הפעולות המתמטיות והיכולת להשתמש במשמעויות האלה לפתרון בעיות. בניית תובנה כזאת תלוייה ב **תהליך החשיבה** שהוא התהליך הקוגניטיבי המוביל אל פתרון הבעיה. **התוצר**, לעומת זאת, הוא התוצאה הסופית , כלומר הפתרון של הבעיה.

בעת ביצוע משימה קוגניטיבית אפשר להתייחס רק לתוצאה הסופית של הפעילות המנטלית, כלומר ל**תוצר**, אפשר להתייחס רק לתהליכי החשיבה, כלומר ל**מבני החשיבה** שהובילו לפתרון, ואפשר להתייחס גם לתהליך החשיבה וגם לתוצר הסופי.
אין ספק שיש חשיבות רבה לתוצאה הסופית, כלומר לפתרון הבעיה המיידית שבה עוסקים, אך בעוד שפתרון שייך לבעיה ספציפית אחת, הפנמה של תהליכי החשיבה עשויים לשרת פתרונות של בעיות רבות.

נטייתם של אנשים רבים היא לחתור לתוצאה נכונה של בעיה מסוימת, לשמוח שהגיעו אליה, לעבור לבעיה אחרת ושוב להגיע לפתרונה, מבלי לתת את הדעת על התהליך המנטלי שהם עברו. אנשים אלה מתעלמים ממבני החשיבה שהשתמשו בהם והם עלולים להיתקע בבעיות קשות יותר מבלי שתהיה להם היכולת להסתמך על תהליכי חשיבה שעליהם להפעיל. אם יחלוף זמן רב עד לפתירת בעיות דומות לאלה שכבר פתרו, הם עלולים להיכשל, כי שכחו את העקרונות שהינחו אותם בעבר. לעומת זאת, אם יהיו מודעים לעקרונות שהובילו אותם לפתרונות ייקל עליהם לפתור גם בעיות קשות וגם להסתמך עליהם לפתרון בעיות מסוגים חדשים.
לדוגמה: תלמיד שלומד שבפעולת פריטה ממירים מספר למספר גדול יותר של חלקים וכל חלק כזה קטֵן באותה מידה, רוכש את מבני החשיבה להבנת ההרחבה בשברים.
בתרגיל :

$$\begin{array}{r} 45 \\ -\;\; 8 \\ \hline \end{array}$$

אנחנו פורטים עשרת אחת מתוך 4 העשרות. את העשרת האחת הזאת אנו ממירים ל – 10 אחדות. כל אחדה כזאת קטנה פי 10 מהעשרת, כדי לשמור על ערכו המקורי של המספר, ניקח פי 10 יותר אחדות.

זוהי דרך חשיבה המלווה אותנו בתחומים אחרים, למשל , בהרחבה של השבר 3/4 ב – 2.

נקבל: $3/4 = 6/8$

שמינית קטנה פי 2 מרבע , אבל מספר השמיניות גדול פי שניים משלוש. כלומר, פרטנו לחלקים קטנים יותר והגדלנו את מספר החלקים באותה מידה, כך לא שינינו את ערך המספר.

לכן, מי שמבין היטב את מבני החשיבה שמאפשרים את הפריטה, יבין טוב יותר את הרעיון של הרחבת השבר.

התוצאות הסופיות של החישובים אינן משקפות בהכרח את ההבנה המתמטית. הן נותנות מענה נקודתי לצורך שהתעורר (כמו הצורך להצליח בבחינה), אבל ללא הבנה של תהליך החשיבה המוביל לפתרון לא תיווצר תובנה מתמטית.

כאשר מתווכים לילד שתהליך החשיבה נותן בידו כלים לפתרון בעיות רבות בעוד שהתוצאה המתקבלת מפתרון בעיה מסוימת קשורה למצב מסוים בלבד, הוא לומד לשים לב לעקרונות וגם להקפיד על תשובה מדוייקת.

שיתוף הילד בהבחנה זו נותן בידי הילד כלי לפיתוח החשיבה בכלל ולפיתוח החשיבה המתמטית בפרט. והוא גם מעורר מודעות של הלומד לתהליכי למידה, והופך את הלומד לשותף מלא להתמודדות עם קשיים. תהליך כזה משרה תחושת ביטחון ושליטה גם ללומד וגם למלמד.

נבדוק כיצד משפיעה הבנת התהליך על פעולות הכפל והחילוק.

ילדים רבים חשים שהם מקבלים מֶסֶר כפול בעת לימוד המתמטיקה. מצד אחד אין הבדל בין 2×3 לבין 3×2 , בגלל חוק החילוף של הכפל, מהצד השני בכל זאת יש הבדל ביניהם, כי 3 פעמים 2 מַחְבָּרות אינו זהה ל – 2 פעמים 3 מחברות. יש הבדל בין העובדה שקניתי 2 מחברות שמחיר כל אחת מהן הוא 3 ש״ח, לבין העובדה שקניתי 3 מחברות שמחיר כל אחת מהן הוא 2 ש״ח. **מבחינת גודל ההוצאה אין הבדל**, אך מבחינת תהליך הקנִייה קיים הבדל מהותי. אחרי הכל במקרה הראשון יש בידי 2 מחברות ובשני: 3 מחברות. זה הבדל משמעותי מכל בחינה.

בכפל עדיין אין התלמידים נכשלים, בגלל פשטותו היחסית, אך הזרע הראשון של קושי מתמטי, הסמוי בשלב הכפל, עלול לנבוט בהמשך.

בגלל הקלות היחסית של הבנת הכפל, נוח להקנות בעת הוראתו את ההבחנה בין **תהליך לתוצר**. הילד לומד שלמרות השוני בטיב הבעיה **הכמות** זהה בשני המקרים.

לפני שהלומד מתמודד עם הבנת החילוק, על כל היבטיו, עליו לשלוט היטב בפעולות החיבור, החיסור והכפל של המספרים הטבעיים. עליו להבחין בקלות בין חוק החילוף, התָּקף לפתרון **תרגילי כפל**, לבין אי תקפותו **לגבי בעיות**.

מסובכת יותר בחילוק ההבחנה בין תהליך, הכרוך בהבנת המשמעות של בעיה חשבונית, לבין התוצר, שהוא התשובה הסופית לבעיה, מסובכת יותר, כי החילוק מייצג תופעות שונות זו מזו.

במאמר שלפנינו נציג את המשמעויות השונות של החילוק, ואת ההבדל ביניהן לבין החישוב של תרגיל חילוק. נתייחס לתחום של המספרים הטבעיים בלבד.

כמה מילים על מכנה משותף

כדי שנבין את המשמעויות של החילוק ואת ההבדל בין בעיות חילוק לבין הפתרון החישובי שלהן, נקדים מספר מילים על מכנה ומכנה משותף.

מקובל לחשוב שהמושגים 'מכנה' או 'מכנה משותף' שייכים לעולם השברים בלבד, אך אין זה כך.

כל מספר שיש לו כינוי, הכינוי שלו הוא בבחינת מכנה.

לדוגמה: בביטוי: '3 בולים'. 3 הוא המונה, כי הוא מונה את הבולים, 'בולים' הם המכנה.

' 3 ' עונה על השאלה: כמה? 'בולים' עונה על השאלה 'את מה'?

בביטוי ' 59 מלפפונים' יש מכנים אחדים.

' 5' מונה את העשרות,' 9 ' מונה את האחדות , 59 מונים את המלפפונים.

המכנים בביטוי זה הם: אחדות, עשרות, מלפפונים.

כאשר מתייחסים למשמעות הביטוי '59 מלפפונים' מבלי להתייחס למבנה הפנימי של המספר,' 59 ' הוא המונה של הביטוי ו'מלפפון' הוא המכנה שלו.

לקביעה המתמטית הזאת יש השלכות על בעיות של חיבור וחיסור.

בבעיה:

ירדן קנתה קופסה של עפרונות צבעוניים ובה 24 עפרונות, יותם קנה קופסה אחרת של עפרונות צבעוניים ובה 15 עפרונות. כמה עפרונות צבעוניים קנו שניהם ביחד?

חשוב לציין <u>בתרגיל</u> את הכינויים, כי הם חלק מהתובנה המתמטית. התרגיל ייראה כך:

39 עפרונות = 15 עפרונות + 24 עפרונות

'עפרון' הם המכנה, כי הוא מציין את מה מנינו. לירדן וליותם יש 39 פעם עפרון.

אם נפתור את התרגיל במאונך, הוא ייראה כך:

2 4

+

1 5
-----
3 9

כתבנו את האחדות הבודדות מתחת לאחדות הבודדות ואת העשרות מתחת לעשרות, כי עלינו לחבר אחדות עם אחדות ועשרות עם עשרות, כלומר, לחבר דברים שיש להם אותו מכנה.

<u>משמעות הכתיבה המאונכת היא : **יצירת מכנה משותף.**</u>

הערה חשובה:

כל מספר טבעי בנוי מאחדות. האחדות האלה מאורגנות בקבוצות. קבוצת האחדות הבודדות זו הקבוצה שמספר האחדות בה הינו פחות מעשר, לכן אי אפשר לקבצן לעשרת.

נתבונן במספר תלת ספרתי כמו 567 .

- 7 מונה את האחדות הבודדות, כלומר את אותן האחדות שמספרן אינו עולה על 9 ,לכן לא ניתן לקבצן לעשרת.
- 6 מונה את העשרות הבודדות, שהן לא יותר מ – 9 עשרות, לכן לא ניתן לקבצן למאה.
- 5 מונה את המאות. איננו מציינים ש – 5 מונה את המאות הבודדות, כי במספר תלת-ספרתי אין ממילא אפשרות לקבץ לאלפים.

הבנת המשמעות של המכנה המשותף תאפשר הבנת המשמעויות השונות של החילוק.

משמעויות החילוק

לחילוק יש 3 משמעויות.

<u>1) חילוק לחלקים :</u>

החילוק הזה קל יחסית להבנה, כי נוח להמחיש אותו.

- דוגמה של חילוק כזה :

בבית ספר יש 4 כיתות א' מקבילות . בכל כיתה אותו מספר של תלמידים. בשכבת כיתות א' יש 120 תלמידים. כמה תלמידים לומדים בכל כיתה?

התרגיל:

30 תלמידים לכיתה = 4 כיתות : 120 תלמידים

אופייה של הבעיה

יש קבוצה כוללת (כל תלמידי השכבה), זהו השלם ;

מחלקים אותה לקבוצות שוות גודל ;

מוצאים כמה תלמידים בכל אחת מהקבוצות.

המכנה של המחולק : תלמיד, המכנה של המחלק : כיתה.

למחולק ולמחלק אין מכנה משותף.

- דוגמה נוספת של חילוק כזה :

חילקו שווה בשווה 60 ספרים ל – 12 ילדים. כמה ספרים קיבל כל ילד ?

המכנה האחד הוא : ספר, המכנה השני – ילד.

מסקנה :

בחילוק לחלקים אין מכנה משותף למחולק ולמחלק.

2. חילוק להכלה

החילוק הזה קשה יותר להבנה. רמת ההפשטה של הפעולה המנטלית עולה על הנדרש בחילוק לחלקים. נתבונן בבעיה הבאה ונראה **שאין זה חילוק במובן הלשוני** היומיומי. מדובר כאן **ביחסי הכלה** כלומר, כמה פעמים מוכלת הקבוצה החלקית בתוך השלם.

- בעיה לדוגמה :

בשכבת כתות א' לומדים 120 תלמידים. הם חולקו שווה בשווה בין הכיתות. בכל כיתה 30 תלמיד. כמה כיתות א' יש בשכבה ?

התרגיל :

120 תלמידים : 30 תלמידים בכיתה = 4 כיתות

אופייה של הבעיה

- נתון שלם ;
- נתון גודל כל קבוצה חלקית שלו ;
- צריך למצוא את מספר הקבוצות המוכלות בשלם.

דרך החשיבה במקרה זה שונה לגמרי מזו של חילוק לחלקים. בעוד שבחילוק לחלקים מחשבים את גודלה של כל קבוצה, בחילוק להכלה עלינו למצוא כמה

פעמים הקבוצה הכוללת (השלם) מכילה בתוכה את הקבוצות שוות הגודל, כלומר, את מספר הקבוצות.

- בעיה נוספת מסוג זה:

לקחנו 60 ספרים וארגנו אותם בחבילות של 12 ספר בחבילה. כמה חבילות קיבלנו?

בחילוק להכלה יש מכנה משותף למחלק ולמחולק, אבל בעוד שבחיבור ובחיסור המכנה משותף גם לתוצאה (כמו: 15 ילדים = 8 ילדים + 7 ילדים), בחילוק להכלה למנה יש כינוי שונה מזה של המחולק והמחלק.

3. חילוק כיחס

החילוק כיחס הוא נושא מורכב השייך לשברים הפשוטים, אבל גם בתחום של המספרים הטבעיים קיים מיגוון בעיות השייכות לתחום זה. נציג חלק מהן:

מציאת היחס בין שני גדלים כמותיים נתונים

בעיה המייצגת סוג זה:

בחוגי סיירות משתתפים 450 ילדים. בחוגי מחשבים משתתפים 90 ילדים. פי כמה גדול מספר המשתתפים בחוגי הסיירות לעומת מספר המשתתפים בחוגי המחשבים?

התרגיל:

5 = 90 ילדים : 450 ילדים

אפשר לנסח את השאלה גם **פי כמה קטן מספר המשתתפים בחוגי המחשב מזה שבחוגי הסיירות**, והתרגיל יישאר אותו תרגיל.

למחלק ולמחולק יש מכנה משותף, אך המנה היא מספר טהור, חסר כינוי.

בעיה מסוג אחר הקשורה ליחס:

מציאת גודל כמותי מתוך גודל נתון והיחס הנתון בין שני הגדלים

לפעמים יחס זה מוביל לפתרון של כפל, כלומר, להגדלת הנתון הכמותי ולפעמים הוא מוביל לפתרון של חילוק, כלומר, להקטנת הנתון הכמותי.

- דוגמה לבעיה כזו:

בדוכן אחד בשוק יש 280 ק"ג ירקות, בדוכן הסמוך לו יש פי 7 יותר ירקות. כמה ק"ג ירקות יש בדוכן השני?

צריך לזכור שהמילה "פי" מבטאת יחס.

זוהי בעיה שפתרונה יהיה כפל ה – 280 ב – 7.

התרגיל:

1960 ק"ג = 280 ק"ג x 7

- דוגמה נוספת:

בדוכן אחד בשוק יש 280 ק"ג ירקות, בדוכן הסמוך לו יש פי 7 פחות ירקות. כמה ק"ג ירקות יש בדוכן השני?

התרגיל:

40 ק"ג = 7 : 280 ק"ג

- דוגמה לבעיה שמופיע בה הביטוי: "פי 3 יותר" והתרגיל שפותר אותה יהיה חילוק.

למרות המילה "יותר" הפעולה מחייבת הקטנת הגודל הכמותי הנתון על ידי חילוק:

סכום הכסף שיש לתמי בקופת החיסכון 540 ₪. לתמי יש פי 3 יותר כסף בקופת החיסכון מאשר יש ליותם. כמה כסף יש ליותם בקופת החיסכון שלו?

התרגיל:

180 ₪ = 3 : 540 ₪

הפותר בעיות אלה חייב בראש ובראשונה להחליט מהי נקודת המוצא לקביעת היחס ולפי זה להחליט איזו פעולה חשבונית עליו לבצע.

הקשר בין קריטריון ומידה משותפת בחילוק של יחס

ה**חילוק כיחס** מתאפיין בהופעתו של **מספר חסר כינוי**, כלומר **מספר טהור**.

שלא כמו בחילוק להכלה למכנה המשותף של המחולק והמחלק בחישוב של יחס יש תפקיד נוסף.

אמנם יש בו מההיבט של ההכלה (כמה פעמים מכיל הגודל הגדול את הגודל הקטן ממנו), אך בנוסף לכך המכנים המשותפים נושאים אופי של **קריטריון.** כדי לקבוע יחס בין שני קטעים עלינו לקבוע להם **מידה משותפת**. ללא המידה המשותפת לא ניתן לקבוע את היחס ביניהם. המכנים המשותפים בין המחולק והמחלק הינם **הבסיס להשוואה.**

בבעיה:

בבית קולנוע יש שני אולמות נפרדים. מספר המושבים באחד מהם הוא 550 בעוד שבשני הוא 110 . מהו היחס בין מספר המושבים בשני האולמות?

5 = 110 מושבים : 550 מושבים

המושבים הם המכנה המשותף, הבסיס המשותף להשוואה, שהוא המידה המשותפת.

אי אפשר לחשב יחס בבעיה הבאה:

תייר אחד הביא עימו 700 <u>ש"ח</u>, חברו הביא 1400 <u>דולר</u>. מה היחס בין כמויות הכסף שבידיהם?

קביעת היחס תחייב הפיכת המטבעות של אחד מהם למטבע של השני, או של שניהם למטבע משותפת שלישית, על מנת שאפשר יהיה לקבוע מה היחס בין הכספים שבידי התיירים.

מסקנה:

ללא מידה משותפת אי אפשר לקבוע יחס.

החילוק כמייצג יחס מכיל, גם את <u>החילוק כהקטנה</u>.

בחילוק כהקטנה, אנחנו מחלקים גודל כמותי במספר טהור.

נתבונן בבעיה שבה מגיעים לגודל כמותי נוסף על סמך יחס וגודל כמותי נתון:

היחס בין מספר התלמידים בין יישוב א' ליישוב ב' הוא 1:8 (קריאת היחס היא : אחד לשמונה. אחד מתאים ליישוב א', שמונה מתאים ליישוב ב') . ביישוב ב' לומדים 560 תלמידים. כמה תלמידים לומדים ביישוב א'?

אופייה של הבעיה:

הגודל הכמותי הנתון: 580 תלמידים (זהו שלם אחד)

היחס הוא 1:8 .

הגודל הכמותי הנובע מהנתונים: (חישוב ערכו של השלם השני).

70 תלמידים = 8 : 560 תלמידים

קשיים שעלולים להתעורר בעת לימוד החילוק

הכיווניות של הפעולה

תלמידים רבים מתקשים בהבחנה בין מחלק למחולק, כלומר, הקושי שלהם מתבטא בקביעת **כיווניות הפעולה:** מה לְחַלֵּק לְמָה.

על פניו נראה שהם מבינים, כי בבעיות של מספרים שלמים הסימן שהם נותנים לעצמם: "תמיד לחלק מספר גדול במספר הקטן ממנו". מאפשר להם לפתור נכון בעיות.

כאשר מגיעים לחילוק מספר קטן למספר גדול ממנו בשברים הפשוטים תלמידים אלה עלולים להיכשל, כי הרמז שנאחזו בו אינו מתאים למצב החדש של חילוק מספר קטן במספר גדול ממנו.

קושי הכיווניות מורגש במיוחד בבעיות יחס. כי היחס נקבע **ביחס לאחד הגדלים** - הפותר חייב לקבוע **ביחס ל**איזה גודל ייקבע היחס.

הבנת היחסיות הזאת מסייעת לפיתוח החשיבה המתמטית.

אי הבחנה בסוג החילוק הנדרש

לומד שניתקל בבעיות חילוק חש במֶסֶר הכפול שהן מְשַדְּרות. מסר כזה מכניס את הלומד לחרדה, בבחינת: 'מה זה בכלל חילוק? קודם פתרתי בעיה אחת שם השתמשתי בחילוק. עכשיו אני פותר בעיה **אחרת** וזו שוב אותה פעולת חילוק. מה קורה לי? משהו לא בסדר אצלי.'

שיום כל פעולה לפי אופייה יסייע ללומד להבחין בין סוגי החילוק. כלומר, התלמיד אינו אומר: " עלי לבצע תרגיל חילוק," אלא: " עלי לבצע תרגיל של חילוק להכלה" וכו'.

מניעת הקשיים

שיתוף הילד בהבחנה בין הסוגים של החילוק ימנע את החרדה שגורם המסר הכפול. תלמיד שיודע להבחין בהבדלים בין סוגי החילוק יודע שעליו להפעיל סוג אחר של פעילות מנטלית, למרות העובדה שהתרגיל המוביל לפתרון הוא תרגיל חילוק.

המכנה המשותף בתרגילי החילוק הארוך

ההבנה המתמטית מתבטאת ביכולת להבין בעיות.

נראה להלן שכדי לפתור את התרגיל המתאים לבעיות אלה עלינו להסתמך על חוקים שונים מאלה שנדרשים מאיתנו להבנת הבעיה.

ראינו שכתיבת תרגילי חיבור וחיסור במאונך אינה אלא פעולה של עשיית מכנה משותף שיאפשר את הפעולות האלה, כי אנחנו רושמים אחדות תחת אחדות עשרות תחת עשרות וכיוצא בזה.

המכנה המשותף בכפל

בכפל אין מכנה משותף בין הגורמים היוצרים אותו, כי אחד הגורמים מציין פְּעָמִים ואין לו כינוי, ואילו הגורם השני מציין את מספר הפריטים בכל קבוצה, והכינוי שלו הוא הכינוי של הפריטים.

[נסה להמציא בעיה שכדי לפותרה תזדקקו לתרגיל: שני **שקלים** כפול חמישה **שקלים**. מה קיבלתם? מה המסקנה שתגיעו אליה?]

למרות האמור לעיל, **בתוך התרגיל** יש שלב שבו אנחנו נזקקים למכנה משותף. למשל, בפתירת התרגיל: = 94 x 56 . כדי לחבר את הכפולות, עלינו לרשום אחדות תחת אחדות, עשרות תחת עשרות וכו׳.

```
      56
   x
      94
   ------
    2 2 4
 +
  5 0 4
 --------
  5 2 6 4
```

זה שלב החיבור שבו ←
נזקקים למכנה המשותף

אחדות עשרות מאות אלפים

מכנים ומכנים משותפים בחילוק הם סַמָּן המסייע לזיהוי סוג החילוק, כי המכנה המשותף למחלק ולמחולק דרוש רק בחילוק להכלה ובחילוק כיחס ולא בחילוק לחלקים.

ראינו, שבשונה מחיבור וחיסור, בכל סוגי החילוק אין מכנה משותף בין המחולק המחלק והתוצאה.

בתרגילים של חילוק המצב שונה.

למשל, בתרגיל: = 8 : 4564 אנחנו משתמשים במכנה המשותף בשלבי הכתיבה והביקורת, אף על פי שהוא יכול להיות הפתרון של בעיה שאין מכנה משותף בין מרכיביה, כמו:

תקציב 8 מתנ״סים היה 4564 ש״ח. כל אחד מהמתנ״סים קיבל אותו סכום כסף. כמה קיבל כל מתנ״ס?

התרגיל:

= 8 מתנ״סים : 4564 ש״ח

בין ה״מתנ״ס״ לבין ה״שקל״ אין מכנה משותף, לעומת זאת בתרגיל יש שלב המסתמך על מכנה משותף, וגם הכתיבה של תרגיל החילוק מתבססת על מכנה משותף:

אחדות עשרות מאות אלפים

```
   = 5 7 1
 ------------
 4 5 6 8 | 8
-
 4 0
 ----
   5 6
-
   5 6
   ----
       8
      -
     -----
```

זה השלב שבו החיסור משמש לביקורת,
לכן חייבים במכנה משותף.

8

=

אנחנו מקפידים לרשום את האחדות תחת האחדות, את העשרות תחת העשרות וכו', כדי לציין על איזה חלק מהמספר המחולק כבר ביצענו את פעולת החילוק, וגם כדי לבצע את פעולת החיסור, בשלבי הביניים.

תלמיד שרוכש את ההרגל להבחין בין תהליך, שהוא דרך החשיבה שיש להפעיל כדי לפתור בעיה, לבין תוצר, שהוא התרגיל שיוביל לפתרון והתשובה הסופית, יוכל להבין שבעוד שהבעיה אינה מחייבת מכנה משותף החישוב בתרגיל כן מחייב זאת.

כיצד נלמד חילוק?

נציג מספר מערכים אפשריים להוראת החילוק.

<u>מערכים לדוגמא</u>

דוגמה למערך המטפל בהקניית המושג "קריטריון" וקישורו למושג "מידה משותפת"

מ. יש בידי עיפרון ועט – השוו ביניהם.

ת. (התשובות מתבססות על רישומי שיעורים שניתנו בעבר).

אורך, צבע , חומר, עובי.

מ. רושמת על הלוח

עיפרון	עט

בשולי הלוח : אורך, צבע , חומר, עובי.

מ. מה עוד?

ת. שניהם כלי כתיבה.

מ. על הלוח

כלי כתיבה

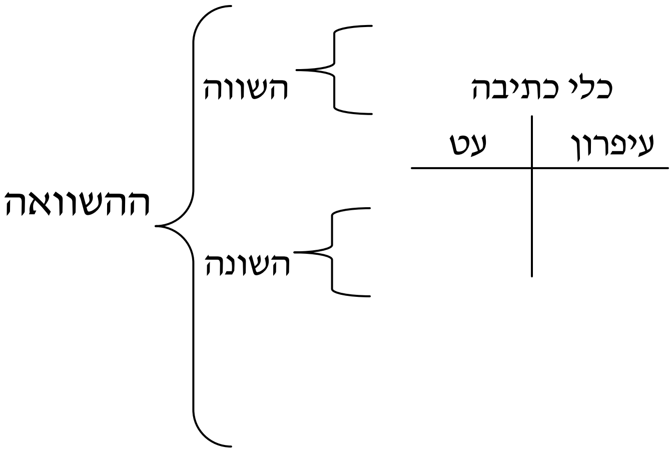
עיפרון	עט

בשולי הלוח נישאר מה שכתוב.

מ. אלו חוקים אפשר כבר עכשיו להסיק מהכתוב על הלוח?

ת. בזמן שעושים השוואה מתייחסים גם לשווה וגם לשונה.

מ. על הלוח.



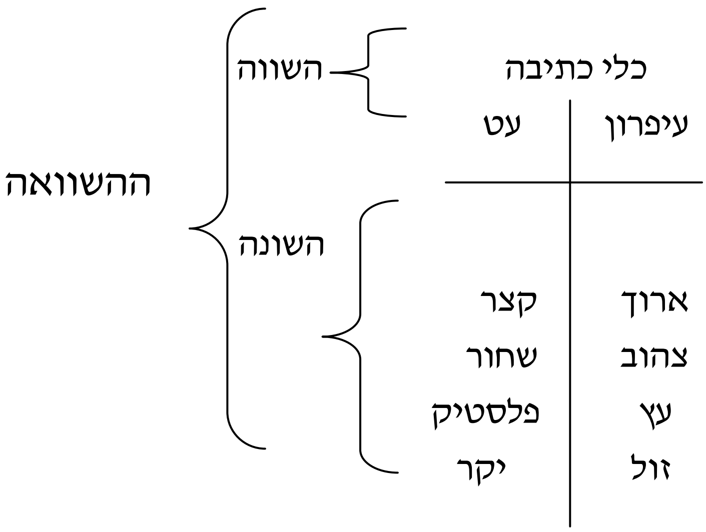
מ. מה חסר לנו על הלוח?

ת.ציון השונה.

מ. מה נכתוב?

ת. ארוך וקצר.

מ. מה עוד? רושמת סיכום התשובות על הלוח.



מ. אלו חוקים נוספים של תהליך ההשוואה מצויים על הלוח?

ת. את השווה כותבים רק פעם אחת ואת השונה פעמיים.

מ. למה?

ת. השווה משותף לעיפרון ולעט, לכן מספיק שייכתב פעם אחת. השונה חייב להיכתב פעמיים, כי אצל כל אחד מהחפצים זה שונה.

מ. יש עוד חוק אחד שמסתתר בטבלה, מהו?

ת. בכל שלב ושלב של רישום השונה אנחנו משווים דברים מאותו סוג.

מ. על הלוח.

לפי מה הישווינו?	כלי כתיבה עיפרון	עט
אורך	ארוך	קצר
צבע	צהוב	שחור
חומר	עץ	פלסטיק
מחיר	זול	יקר

ההשוואה

השווה

השונה

מ. לפי מה השווינו בשורה הראשונה?

ת. לפי האורך.

מ. ובשנייה? וכו'. רושמת בטבלה שלעיל.

מ. יש לי שתי שאלות הקשורות זו בזו, האחת: למה כשאמרתם בתחילת השיעור: אורך, צבע, חומר, מחיר – לא רשמתי זאת בַּטבלה? השנייה: למה ציירתי שני קווים מפרידים?

ת. צריך להבחין בין תהליך ההשוואה והבסיס להשוואה.

לפי מה הישווינו?	כלי כתיבה עיפרון	עט
אורך	ארוך	קצר
צבע	צהוב	שחור
חומר	עץ	פלסטיק
מחיר	זול	יקר
הבסיס להשוואה	עצם ההשוואה	

ההשוואה

השווה

השונה

מ. לפי מה שאנחנו משווים או שוקלים קוראים **קריטריון,** לכן נשנה בטבלה את הכותרת.

מהו הקריטריון?	כלי כתיבה	
	עיפרון	עט
אורך	ארוך	קצר
צבע	צהוב	שחור
חומר	עץ	פלסטיק
מחיר	זול	יקר

ההשוואה

השווה

השונה

הבסיס להשוואה

עצם ההשוואה

מ. למה רשמתי את הקריטריונים בשולי הלוח?

ת. התבקשנו להשוות ולא לומר מהו הבסיס להשוואה.

מ. זה נכון. עכשיו נסו להגדיר מה זה קריטריון.

ת. קריטריון הוא תכונה הנמצאת בַּדָּבָר בו אנו מטפלים שלפיה אנחנו משווים או שוקלים (מחליטים).

ת. הקריטריון הוא הבסיס להשוואה.

מ. מי יכול לסכם מה למדנו.

ת. למדנו ש : בתהליך ההשוואה מתייחסים גם לשווה וגם לשונה ;

השווה הוא המשותף, על כן כותבים אותו רק פעם אחת.

השונה שייך לכל אחד מהמושווים באופן ייחודי, על כן הוא ניכתב פעמיים.

בכל שלב של ההשוואה אנחנו משווים על **בסיס אותו הקריטריון**.

ההבחנה בין תהליך ההשוואה עצמו לבין הבסיס עליו היא נשענת חשובה ביותר.

הקריטריון זו תכונה הנמצאת בדבר שלפיה אנחנו משווים או שוקלים.

מ. מה המסקנה המתבקשת מהסיכום?

ת. הקריטריון הוא המכנה המשותף המקשר בין התכונות השונות. הוא השווה בתוך השׁוֹנוּת. הוא מאפשר לנו את ההשוואה.

הערה:

המערך על הקריטריונים ניתן בראשי פרקים בלבד. כל צעד בנפרד דורש פיתוח. התשובות שנרשמו במערך שלפנינו היו תשובות סופיות שהתלמידים נתנו לאחר הנחייה של המורה.

העיקרון הוא: לימוד מדורג של המושג, שלב אחר שלב. לתת לתלמידים לחפש בעצמם את החוקיות, לנסח אותה ולסַכְּמָהּ.

לאחר שהמושג 'קריטריון' הובן יש להביא להפנמתו בתחומים שונים, כמו מקצועות הלימוד, חיי היומיום, בנושאים חברתיים ועוד.

מ: מה הקשר בין מה שלמדנו עכשיו לבין מה שלמדנו בחילוק?

ת: הקריטריון קובע את הכינוי.

מ: הסבירו את דבריכם.

ת: בחילוק לשם מציאת יחס חייבים **במידה משותפת** בין שני מרכיבי החילוק. המידה המשותפת היא הקריטריון להשוואה.

דוגמא למערך המבחין בין חילוק לחלקים וחילוק להכלה

מ. אני עומדת להציג לפניכם שתי בעיות, עליכם להשוות ביניהן לחפש את השווה ואת השונה. לפני ההשוואה עליכם לפתור את הבעיות. שימו לב לכינויים.

בעיה א':

לקראת שנת הלימודים החדשה קיבל בית ספר 480 כיסאות בעבור 12 כיתות. בית הספר סידר בכל כיתה מספר שווה של כיסאות. כמה כיסאות בכל כיתה?

בעיה ב':

לקראת שנת הלימודים החדשה קיבל בית ספר 480 כיסאות. לכל כיתה הוכנסו 40 כיסאות. לכמה כיתות הוכנסו הכיסאות?

פתרון בעיה א':

480 כיסאות : 12 כיתות = 40 כיסאות

פתרון בעיה ב':

480 כיסאות : 40 כיסאות = 12 כיתות

נשווה בין שני הפתרונות:

אותם המספרים.
אותו מצב של חלוקת כיסאות.
בשתיהן הפעולה החשבונית היא חילוק.
בשתיהן אין מכנה משותף בין שלושת מרכיבי הבעיה

בעיה א׳	בעיה ב׳
אין מכנה משותף בין המחולק והמחלק מחלקים את הקבוצה הכוללת לקבוצות שוות גודל	יש מכנה משותף בין המחולק והמחלק בודקים כמה פעמים הקבוצות שוות הגודל מוכלות בקבוצה הכוללת

מ. אנחנו רואים שתהליך החשיבה שונה בשתי הבעיות, למרות שבשתיהן התוצר הוא תרגיל של חילוק. אלו באמת שני סוגים שונים של בעיות, לכן גם יש להם שמות שונים. בעיה א׳ עוסקת ב**חילוק לחלקים**, בעיה ב׳ ב**חילוק להכלה.**
מי יכול להסביר את משמעות השמות האלה?
מ. כדי שנוכל לבדוק את עצמנו אם אכן הבנו את ההבדל בין שני הסוגים של החילוק נעבור למשימה הבאה: המציאו בעיה אחת שכדי לפתור אותה עלינו לבצע חילוק להכלה ואחת שבה התרגיל יהיה חילוק לחלקים.

לאחר שהתלמידים מציגים את הבעיות שהמציאו, מסבירים את שיקוליהם ובודקים את הבעיות, המורה מפנה את התלמידים לעבודה עצמית.
בשלב זה ניתן לבחון את מידת ההבנה של כל תלמיד ותלמיד.

דוגמה למערך שמציג את החילוק כיחס

מ. בשיעור הקודם למדנו שהחילוק אינו פעולה אחת מבחינת החשיבה. היום נלמד שהחילוק אינו רק חילוק להכלה וחילוק לחלקים, אלא גם **יחס.**
ליחס יש היבטים אחדים.
אני אציג לכם מספר בעיות שבהן נכיר את האיפיונים של בעיות שבהן החילוק מבטא יחס. מה צריך לעשות כדי להבין את כל ההיבטים של היחס?

ת.

1) להשוות בין הבעיות , כדי שנוכל להבחין איזו בעיה שייכת לאיזה סוג של חשיבה.
2) לשיים אותן, כלומר לתת לכל סוג של בעיה שם שמתאים לה. השיום יסייע לנו למיין את הבעיות וכך להגיע לפתרון המתאים.
3) להשוות אותן לבעיות חילוק שכבר היכרנו : חילוק לחלקים , חילוק להכלה.

מ. לפנינו בעיית יחס ראשונה :

בבית דירות אחד יש 72 שכנים. בבית הדירות השני יש 9 שכנים. פי כמה גדול מספר השכנים בבית הדירות הראשון לעומת מספרם בבית השני?

מ. איזו משלושת ההצעות שלכם תתרום להבנתנו את הבעיה הנוכחית?

ת. כדאי להשוות את הבעיה הנוכחית עם הבעיות שהכרנו בעבר. אם כך, נעזר בהצעה השלישית.

מ. למה?

ת. כאשר לומדים דבר חדש מבינים אותו טוב יותר אם אנחנו יכולים להשוותו לדברים מוכרים ולראות את המאפיינים המשותפים והנבדלים זה מזה.

מ. לְמָה נשווה?

ת. לחילוק לחלקים ולחילוק להכלה.

מ. כיצד תערכו את ההשוואה?

ת. קודם ניקח את בעיית היחס שהראית לנו ונפתור אותה.

בבית אחד 72 ש' בשני 9 ש'. היחס ביניהם יתקבל על ידי חילוק 72 ב – 9.

מ. כדי להבין את הבעיה, על מה חייבים להקפיד?

ת. על הכינויים.

הפיתרון :

8 = 9 שכנים : 72 שכנים

ת. מה הכינוי של 8 ?

מ. אין לו כינוי. זהו **מספר טהור.** הוא מבטא **יחס.** עכשיו תוכלו לערוך את ההשוואה ומתוכה להגיע למסקנות לגבי היחס.

המשותף : בכל הבעיות משתמשים בתרגילי חילוק לצורך הפיתרון.

בכולן אין מכנה משותף לשלושת מרכיבי הבעיה : המחולק, המחלק, המנה.

השונה:

חילוק לחלקים	חילוק להכלה	חילוק למציאת יחס
אין מכנה משותף בין המחלק, המחולק והמנה	יש מכנה משותף בין המחלק והמחולק, אבל המכנה של המנה שונה מהמכנה של המחולק והמחלק	יש מכנה משותף בין המחלק והמחולק, למנה אין מכנה.
מחפשים מה גודל כל קבוצה	מחפשים כמה קבוצות מוכלות בקבוצה הכוללת	מחפשים את היחס בין שתי הקבוצות
המכנה של המנה: פריטים לקבוצה	המכנה של המנה: מס׳ הקבוצות	המנה היא **מס׳ טהור**

מסקנה כוללת: בחילוק אין מכנה משותף למחלק, למחולק ולמנה.

מ: אם כך, למה בתרגיל החילוק הארוך אנחנו כותבים את האחדות מתחת לאחדות, את העשרות מתחת לעשרות וכו׳, כמו בתרגיל הזה שלמדנו?

```
אחדות עשרות מאות אלפים
   =  | 5 | 7 | 1
  4   | 5 | 6 | 8  | 8
 -4   | 0
      | 5 | 6
     -| 5 | 6
              8
             -8
              =
```

ת: בבעיות חילוק אין מכנה משותף למחולק, למחלק ולמנה, אבל כאשר פותרים את התרגיל של החילוק הארוך, יש צורך במכנה המשותף כדי שנארגן את המחולק לפי ספרותיו וכדי שיהיה לנו נוח לערוך את הבדיקה בכל שלב ושלב.

מ. לאלו מסקנות הגעתם בעקבות ההשוואה בין סוגי החילוק?

ת. מה שבולט מההשוואה זה שהמספר המבטא יחס הוא מספר טהור.

ת. המכנה המשותף בין המחלק והמחולק נמצא גם בחילוק להכלה וגם במציאת היחס.

מ. בחילוק להכלה אנחנו חייבים במכנה המשותף, כדי שנדע כמה פעמים הקבוצות החלקיות שוות הגודל מוכלות בקבוצה הכוללת. למה במציאת היחס יש לנו מכנה משותף בין המחולק למחלק?

ת. זה כמו **בקריטריון**. כדי להשוות צריך מכנה משותף . משהו חייב להיות שווה כדי שנמצא את השונה. המכנים הם בתפקיד של **הבסיס להשוואה.**

מ. בגיאומטריה יש פרק שעוסק במציאת יחסים בין קטעים. למכנה המשותף הזה קוראים שם **מידה משותפת.**

מ. מי יכול לסכם מה למדנו על היחס?

ת. המאפיין את היחס זה הימצאותו של מספר טהור. כדי לקבל את היחס אנחנו זקוקים למכנה משותף לא רק לצורך ההכלה, אלא גם כדי ליצור מידה משותפת , כמו הקריטריון.

מ. מה דעתכם על המשפט הבא :

לחנה 12 דולרים לרחל 4 ש"ח . היחס בין הכסף של חנה ורחל הוא 3 : 1.

ת. אי אפשר לחשב את היחס הזה כי אין מידה משותפת לשני הסכומים.

מ. מה עלינו לעשות?

ת. או שחנה תמיר את הדולרים בשקלים. או שרחל תמיר את השקלים בדולרים. או ששתיהן תמרנה את כספם למטבע שלישי. כאשר תהיה אותה מטבע לשתיהן, אפשר יהיה למצוא את היחס בין כַּסְפָּן. מציאת היחס פירושו השוואת מצבן הכספי מבחינה מתמטית.

מ. לאחר שהבנתם את בעיית היחס על סמך ההשוואה עם החילוק לחלקים והחילוק להכלה, נכיר עוד סוג של בעיית יחס.

בקופסה גדולה של וופלים יש 60 וופלים. בקופסה קטנה של וופלים מאותו סוג יש פי שישה וופלים פחות. כמה וופלים בקופסה הקטנה?

הפתרון :

10 וופלים = 6 : 60 וופלים

מ. השוו את הבעיה הזאת לבעיית היחס שהיכרנו.

ת. גם בה יש מספר טהור, המבטא יחס. בבעיה הקודמת היו לנו שני גדלים כמותיים ומתוכם הפקנו את היחס. בבעיה הנוכחית יש לנו מספר כמותי אחד והיחס הנתון. באמצעות שני אלה הגענו אל הגודל הכמותי הנוסף.

מ. יש בבעיה הזאת היבט נוסף. מה עשינו לגודל הכמותי?

ת. הקטנו אותו .

מ. נכון. אנחנו רואים שהחילוק כיחס מכיל בתוכו גם את המשמעות של **החילוק כהקטנה.**

מ. איזו מילה מרמזת לנו שיש לנו בעיית יחס?

ת. פי.

מ. האם תמיד 'פי' אומר שיש לפנינו הקטנה?

ת. לא. צריך לומר 'קטן פי'.

מ. נבדוק על ידי בעיה לדוגמה אם התשובה הזאת נכונה.

הבעיה:

מספר המושבים באיצטדיון של בית שאן קטן פי 2 מזה שבקיסריה. בבית שאן יש כ – 300 מושבים . כמה מושבים בקיסריה?

מה הפתרון?

ת. כתוב אמנם: 'קטן פי', אבל עלינו לכפול ב – 2 את המושבים שבבית שאן.

מ. מה המסקנה?

ת. המילים : 'קטן פי' אינן מספיקות כדי להדריכנו איזו פעולה עלינו לפעול: כפל או חילוק.

מ. במה זה תלוי?

ת. בנקודת המוצא. אם נתון לנו הגודל הכמותי הגדול יותר ואנחנו מחפשים גודל כמותי קטן ממנו – עלינו להשתמש בחילוק כהקטנה. אם נתון לנו הגודל הכמותי הקטן יותר ועלינו לחפש את הגודל הגדול ממנו 'פי' , עלינו לכפול. זו בכלל אינה פעולת חילוק.

מ. מה עם הביטוי: ' גדול פי' ?

ת. זה אותו דבר. תלוי בנקודת המוצא. אם נתון הגודל הכמותי הקטן יותר עלינו לכפול כדי להגיע לגודל הכמותי הגדול יותר. אם נתון הגודל הכמותי הגדול יותר עלינו להשתמש בתכונת ההקטנה של החילוק.

מ. מה למדנו בקשר ליחס?

ת. למדנו שהחילוק כמבטא יחס מכיל בתוכו תת-קבוצות.

1. מציאת היחס;
2. מציאת גודל כמותי על סמך יחס נתון וגודל כמותי נתון.
3. החילוק המשמש להקטנה.

למדנו גם שיחסי חילוק עשויים להתבטא באמצעות המילה 'פי', אבל אין להסתמך על הביטויים: 'גדול פי' או 'קטן פי' לקביעת הפעולה הנדרשת.

מ. לסיכום כל החילוק אני תולה פלקט שתוכלו להיעזר בו בפיתרון בעיות חילוק.

הפנים השונות של החילוק

- חילוק כיחס
  - מציאת היחס
    - המכנה המשותף בין המחולק והמחלק הוא **קריטריון** להשוואה
      - המנה היא **מספר טהור – ללא כינוי**
  - מציאת גודל כמותי
    - המחלק הוא **מספר טהור** חסר כינוי
  - הקטנה
- חילוק להכלה
  - יש מכנה משותף בין המחולק והמחלק
    - למנה מכנה שונה
- חילוק לחלקים
  - אין מכנה משותף בין המחולק והמחלק

בעיות מסכמות

רישמו בכל בעיה מהי הפעולה החשבונית הנדרשת.

לדוגמה:

בשקית היו 50 אגוזים. חילקו אותם שווה בשווה ל – 5 קעריות. כמה אגוזים היו בכל קערית?

חילוק לחלקים.

10 אגוזים = 5 קעריות : 50 אגוזים

תשובה: בכל קערית 10 אגוזים.

א. אריאלה חסכה 90 ש"ח. דני אחיה חסך פי 2 פחות ממנה. כמה חסך דני?

ב. במשפחת דביר 4 ילדים. במשפחת הראל 8 ילדים. מה היחס בין מספר הילדים במשפחת הראל לעומת משפחת דביר?

ג. בערוגת הירק של משפחת יעקבי יש 80 שתילי אפונה, שהם פי 4 יותר משתילי העגבניות. כמה שתילי עגבניות בערוגה?

ד. לאיילת יש פי 3 צבעי עיפרון מאשר לרקפת. לרקפת יש 8 צבעי עיפרון. כמה צבעי עיפרון יש לאייל?

ה. קבוצת חברים ארגנו טיול וחשבו שיוכלו להצטרף 10 חברים. לאחר בדיקת אמצעי התחבורה שעמדו לרשותם הוחלט להקטין את מספר המטיילים פי 2. כמה מטיילים יצאו לטיול?

ו. בגן חיות בחיפה היו 63 בעלי חיים. בגן החיות התנ"כי בירושלים היו 189 בעלי חיים. פי כמה הייתה גדולה אוכלוסיית גן החיות הירושלמי מזו של גן החיות שבחיפה?

ז. קבוצת כדור-סל ניצחה ב – 12 משחקים. היחס בין ניצחונותיה להפסדיה היה 3 : 1 (שלוש לאחד. 3 מתאים לניצחונות – הראשון בבעיה, 1 להפסדים כי הוא מופיע שני בבעיה) . כמה הפסדים נחלה הקבוצה?

ח. זמר פירסם אלבום שיריו. 9 שירים עצובים ו – 3 שירים שמחים. פי כמה היו יותר שירים עצובים משירים שמחים באלבומו?

ט. בספר הלימוד לחשבון היו 45 עמודים. בספר הלימוד לעברית היו 135 עמודים. מה היחס בין העמודים בשני הספרים?

י. קבלן הרוויח בחודש ינואר 10,890 ש"ח. בפברואר קטנו רווחיו פי 2 . כמה הרוויח בשני החדשים האלה?

יא. בשקית היו 50 אגוזים. חילקו אותם שווה בשווה לקעריות. בכל קערית הניחו 10 אגוזים. בכמה קעריות הניחו את האגוזים?

יב. בבית ספר "הנגב" יש 500 תלמידים, בבית ספר "הגליל" יש 100 תלמידים. פי כמה גדול מספר התלמידים בבית ספר "הנגב" לעומת מספרם בבית ספר "הגליל"?